เฉลย

1. 3	11. 1	21. 3	31. 7	41. 34.5
2. 3	12. 4	22. 4	32. 169	42. 36
3. 2	13. 2	23. 4	33. 3	43. 3.5
4. 3	14. 4	24. 3	34. 66	44. 4
5. 2	15. 4	25. 4	35. 201	45. 1277
6. 2	16. 3	26. 4	36. 3	
7. 1	17. 1	27. 3	37. 270	
8. 4	18. 1	28. 1	38. 14	
9. 2	19. 4	29. 2	39. 11	
10. 3	20. 2	30. 1	40. 55	

แนวคิด

1. ตอบ 3

วิธีทำ จะไล่แทนแต่ละข้อดูก็ได้ หรืออีกวิธีคือ สังเกตว่า 4 แถวล่างของตารางที่ p เป็น F จะได้ช่องผลลัพธ์เป็น T ดังนั้น $S(p,q,r)$ น่าจะอยู่ในรูป $\sim p \vee$ ____ (เพราะ $\sim F \vee$ _____ $\equiv T \vee$ ____ จะเป็น T เสมอ) และ 4 แถวบน จะได้ผลลัพธ์เหมือน q ดังนั้น $S(p,q,r) \equiv \sim p \vee q$

ทำแต่ละข้อให้อยู่ในรูปอย่างง่าย จะได้ตรงกับข้อ 3

1. $\equiv \sim q \vee p \vee (q \wedge r)$

$\equiv p \vee [(\sim q \vee q) \wedge (\sim q \vee r)]$ กระจาย $\sim q \vee$ เข้าไปในวงเล็บ

$\equiv p \vee [\quad T \quad \wedge (\sim q \vee r)]$ หรือจะใช้สูตร $\boxed{\begin{array}{l} p \wedge (p \vee q) \equiv p \\ p \vee (p \wedge q) \equiv p \end{array}}$

$\equiv p \vee \quad (\sim q \vee r)$

ใช้สูตรล่าง จะทำจากบรรทัด 2 ไปบรรทัดสุดท้าย

2. $\equiv \sim (\sim q \vee p) \vee (\sim p \vee \sim r)$

$\equiv (q \wedge \sim p) \vee \sim p \vee \sim r$

$\equiv (q \wedge \sim p) \vee (T \wedge \sim p) \vee \sim r$ เปลี่ยน $\sim p$ เป็น $T \wedge \sim p$ เพื่อดึงตัวร่วม กำจัด q

$\equiv [\quad (q \vee T) \quad \wedge \sim p] \vee \sim r$

$\equiv [\quad T \quad \wedge \sim p] \vee \sim r$

$\equiv \quad \sim p \vee \sim r$

3. $\equiv \sim(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge r)$
$\equiv \sim p \vee q \quad \vee (q \wedge r)$
$\equiv \sim p \vee \quad q$

คราวนี้ขอใช้สูตรในกรอบสี่เหลี่ยม (สูตรล่าง)
(หรือจะเปลี่ยน q เป็น $q \wedge T$
แล้วดึงตัวร่วม $q \wedge$ แบบข้อ 2

4. $\equiv \sim(p \wedge \sim q) \vee (p \rightarrow \sim r)$
$\equiv \ \sim p \vee q \quad \vee (\sim p \vee \sim r)$
$\equiv \ \sim p \vee q \vee \sim r$

2. ตอบ 3

วิธีทำ ก. $\exists x \forall y$ เป็นจริงเมื่อ มี x หนึ่งค่า ที่คู่กับ y ได้ทุกตัว สังเกตว่า ถ้า $y = x$ ประโยคนี้จะกลายเป็น $0 < 0$ ซึ่งไม่จริง ดังนั้น x จะคู่กับ y ไม่ได้ทุกตัว (เช่น $x = 0.2$ จะคู่กับ $y = 0.2$ ไม่ได้ , $x = 0.7$ จะคู่กับ $y = 0.7$ ไม่ได้) $\longrightarrow$ ก. ผิด

ข. จะเห็นว่า อสมการเป็นบวกทั้งสองฝั่ง (เพราะเอกภาพสัมพัทธ์คือ $(0,1)$ บังคับใช้กับทั้ง x และ y ซึ่งจะทำให้ $1 - xy$ เป็นบวก) ดังนั้น จะสามารถยกกำลังสองทั้งสองข้างเพื่อกำจัดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ได้

ไม่ต้องกระจาย แต่ให้ย้ายข้าง แล้วเข้าสูตร $u^2 - a^2 = (u+a)(u-a)$

$$|x-y|^2 < (1-xy)^2$$
$$(x-y)^2 < (1-xy)^2$$
$$(x-y)^2 - (1-xy)^2 < 0$$
$$(x-y+1-xy)(x-y-1+xy) < 0$$
$$(x+1-y-xy)(x-1-y+xy) < 0$$
$$(x+1-y(1+x))(x-1+y(-1+x)) < 0$$
$$(x+1)(1-y) \qquad (x-1)(1+y) \qquad < 0$$

เนื่องจาก $x, y \in (0,1) \longrightarrow (+)(+) \qquad (-)(+) \longrightarrow$ เป็น ลบ < 0 จริง $\longrightarrow$ ข. ถูก

3. ตอบ 2

วิธีทำ ก. จากกฎของ sin จะได้ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ แทน $A = 3B$ และ $a = 2b$ ในคู่แรก จะได้

$\frac{2b}{\sin 3B} = \frac{b}{\sin B}$ จากสูตรมุม 3 เท่า จะได้ $\frac{2b}{3\sin B - 4\sin^3 B} = \frac{b}{\sin B}$ ตัด b กับ sin B ตลอดทั้งสองฝั่ง เหลือ $\frac{2}{3 - 4\sin^2 B} = 1$ แก้สมการ จะได้ $2 = 3 - 4\sin^2 B$

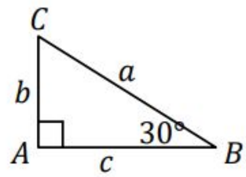
$\frac{1}{4} = \sin^2 B$ แต่มุมใน $\triangle$ อยู่ในช่วง 0° ถึง $180^\circ \longrightarrow$ sin เป็นบวก

$\pm\frac{1}{2} = \sin B$ ได้ $\sin B = \frac{1}{2} \longrightarrow B = 30^\circ, 150^\circ$

แต่ $B = 150^\circ$ ไม่ได้ เพราะจะทำให้ $A = 3(150^\circ)$ เกิน

$180^\circ \rightarrow B = 30^\circ, A = 3(30^\circ) = 90^\circ \rightarrow$ ก. ถูก

ข. วาดรูปได้



ดังนั้น $k = \frac{a}{c} = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$

ลองแทนในสมการในข้อ ข.

จะได้ $3\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right) = 9\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} + 3 = \frac{8}{\sqrt{3}} - 12 - \frac{2}{\sqrt{3}} + 3 \neq 0 \rightarrow$ ข. ผิด

4. ตอบ 3

วิธีทำ ข้อนี้ต้องระวังคำว่า “หารด้วย” $\longrightarrow$ a หารด้วย b ลงตัว คือ a เป็นตัวตั้ง (แต่ a หาร b ลงตัว คือ b เป็นตัวตั้ง) aRb ก็คือ b นั่นเอง ดังนั้น ก. และ ข. เปลี่ยนเป็นสัญลักษณ์ที่เราคุ้นเคยได้เป็น

ก. ถ้า $y|x$ และ $z|y$ แล้ว $(y+z)|x$

จะเห็นว่าผิด เช่น ถ้า $x = y = z = 1$ จะได้ $1|1$ และ $1|1$ แต่ $2 \nmid 1 \longrightarrow$ ก. ผิด

ข. ถ้า $x|w$ และ $z|y$ แล้ว $xz|wy$ ข้อนี้ ตรงตามสมบัติของการหารลงตัว $\longrightarrow$ ข. ผิด

(หรือพิสูจน์โดยให้ $w = mx, y = nz$) คูณกันได้ $wy = (mn)(xz) \longrightarrow xz|wy$ ก็ได้)

5. ตอบ 2

วิธีทำ เปลี่ยน 4 เป็น 2^2 แล้วโยนเลขชี้กำลังไปหน้า log จะได้ $2\log_a 2 + 2\log_b 2 = 9\log_{ab} 2$

คูณตลอดด้วย $\log_2 ab$: $(2\log_a 2)(\log_2 ab) + (2\log_b 2)(\log_2 ab) = (9\log_{ab} 2)(\log_2 ab)$

$$
\begin{aligned}
2\log_a ab + 2\log_b ab &= 9 \\
2(\log_a a + \log_a b) + 2(\log_a a + \log_a b) &= 9 \\
2(1 + \log_a b) + 2(\log_a a + 1) &= 9 \\
2\log_a b + 2\log_a a - 5 &= 0
\end{aligned}
$$

$\log_a b$ กับ $\log_a a$ เป็นส่วนกลับกัน ดังนั้น $\log_a b = k$ จะได้ $\log_b a = \frac{1}{k}$

ดังนั้น สมการจะกลายเป็น

$$
\begin{aligned}
2k + \frac{2}{k} - 5 &= 0 \\
2k^2 + 2 - 5k &= 0 \\
2k^2 - 5k + 2 &= 0 \\
(2k-1)(k-2) &= 0
\end{aligned}
$$

$$k = \frac{1}{2}, 2 \longrightarrow \log_a b = \frac{1}{2}, 2$$

โจทย์ถาม $\log_a(ab^5)+\log_b\left(\frac{a^2}{\sqrt{b}}\right)=\log_a a+\log_a b^5+\log_b a^2-\log_b\sqrt{b}$

$$= 1 + 5\log_a b + 2\log_b a - \frac{1}{2}$$

แทนค่าหาตัวมาก $\rightarrow$ ถ้า $\log_a b=\frac{1}{2}$ จะได้ $\log_b a=2 \rightarrow$ แทนได้ $1+5\left(\frac{1}{2}\right)+2(2)-\frac{1}{2}$

$\rightarrow$ ถ้า $\log_a b=2$ จะได้ $\log_b a=\frac{1}{2} \rightarrow$ แทนได้ $1+5(2)+2\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2} \rightarrow$ มากกว่า

จะได้ค่ามากสุด $=1+5(2)+2\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=1+10+1-0.5=11.5$

6. ตอบ 2

วิธีทำ $=\dfrac{\left(-2\sin 25^\circ \sin 85^\circ\right)\sin 35^\circ}{-2\sin 75^\circ} \leftarrow$ คูณ -2 บนล่างให้เข้าสูตร

$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$
$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$
$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$
$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$

$$=\frac{\left[\cos 110^\circ-\cos\left(-60^\circ\right)\right]\sin 35^\circ}{-2\sin 75^\circ}$$

$$=\frac{\left[\cos 110^\circ-\frac{1}{2}\right]\sin 35^\circ}{-2\sin 75^\circ}$$

$$=\frac{\cos 110^\circ\sin 35^\circ-\frac{1}{2}\sin 35^\circ}{-2\sin 75^\circ}$$

คูณ 2 บนล่างให้เข้าสูตร

$$=\frac{2\cos 110^\circ\sin 35^\circ-\sin 35^\circ}{-4\sin 75^\circ}$$

$$=\frac{\sin 145^\circ-\sin 75^\circ-\sin 35^\circ}{-4\sin 75^\circ}$$

$$=\frac{-\sin 75^\circ}{-4\sin 75^\circ}$$

$\sin 145^\circ=\sin 35^\circ$

เพราะมุมรวมกันได้ 180°

$$=\frac{1}{4}$$

1. $\tan 15^\circ$ เป็นค่าติดรูทไม่ลงตัว $\neq\frac{1}{4}$ แน่นอน

2. $=\dfrac{-2\sin 15^\circ\sin 75^\circ}{-2}$

$$=\frac{\cos 90^\circ-\cos\left(-60^\circ\right)}{-2}$$

$$=\frac{0-\frac{1}{2}}{-2}=\frac{1}{4}\rightarrow \text{ถูก}$$

3. $=\dfrac{\left(2\cos 20^\circ\cos 40^\circ\right)\cos 40^\circ}{2}$

$$=\frac{\left[\cos 60^\circ+\cos\left(-20^\circ\right)\right]\cos 80^\circ}{2}$$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$

$$=\frac{\left[\frac{1}{2}+\cos 20^\circ\right]\cos 80^\circ}{2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\cos 80^\circ+\cos 20^\circ\cos 80^\circ}{2}$$

$$=\frac{\cos 80^\circ+2\cos 20^\circ\cos 80^\circ}{4}$$

$$=\frac{\cos 80^\circ+\cos 100^\circ+\cos\left(-60^\circ\right)}{4}$$

$$=\frac{\cos\left(-60^\circ\right)}{4}=\frac{\frac{1}{2}}{4}=\frac{1}{8}$$

$\cos 80^\circ$ กับ $\cos 100^\circ$ เป็นลบซึ่งกันและกัน จะตัดกันได้

4. $=\sec 60^\circ=2$

7. **ตอบ 1**

วิธีทำ เส้นตรง $y=1$ เป็นเส้นแนวนอน มีความชัน $=0\longrightarrow$ ความชัน $y=f(x)$ ที่ $x=1$ ต้องเป็น 0

ด้วย $\longrightarrow f'(1)=0$ จาก $f(x)=ax+\frac{b}{x}=ax+bx^{-1}\longrightarrow$ ดิฟได้ $f'(x)=a=bx^{-2}$

ดังนั้น $a-b\left(1^{-2}\right)=0$
$a-b=0$ ...(1)

$y=f(x)$ ผ่านจุด $(1,1)$ แสดงว่า แทน $(1,1)$ แล้วสมการต้องเป็นจริง จะได้ $1=a(1)+\frac{b}{1}$

$1=a+b$ ...(2)

แก้ (1) กับ (2) บวกสองสมการ b จะตัดกันได้

เหลือ $2a=1$

$a=\frac{1}{2}$

แทนใน (1) จะได้ $b=\frac{1}{2}$ ด้วย

ก. หาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ต้องแก้ $f'(x)=0\longrightarrow f'(x)=a-bx^{-2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^{-2}=0$

$x^{-2}=1$

$x=\pm 1$

หาว่าสูงหรือต่ำ ต้องดูว่า $f''(1)=1^{-3}=1\longrightarrow>0\longrightarrow$ ต่ำสุดสัมพัทธ์

$f''(-1)=(-1)^{-3}=-1\longrightarrow<0\longrightarrow$ สูงสุดสัมพัทธ์ $\longrightarrow$ ก. ถูก

ข. หา $\lim\limits_{x\to 1}\longrightarrow$ เทคนิคคือ จะลองแทน $x=1$ ลงไปดูก่อน ถ้าหาค่าได้ $\left(\neq\frac{0}{0}\right)$ ก็ไม่ต้องจัดรูป

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f\left(\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}\left(1^{-1}\right)\right)=f(1)=\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}\left(1^{-1}\right)=1$ ไม่อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1}(f\circ f)(x)=1$ ได้เลย

และ $f\left(2a^2+2b^2\right)=f\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=f(1)$ เท่ากัน $\longrightarrow$ ข. ถูก

8. **ตอบ 4**

วิธีทำ จำนวนแบบทั้งหมด : เลือก 4 ตัวจาก S ได้ $\binom{15}{4} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{4\cdot 3\cdot 2} = 15\cdot 7\cdot 13$

จำนวนแบบที่โจทย์ต้องการ : จะได้ 4 ตัวใน A ต้องอยู่ในรูป a_1 , $a_1 + d$, $a_1 + 2d$, $a_1 + 3d$

โดยมีเงื่อนไขคือ a_1 และ d ต้องเป็นจำนวนเต็มบวก และตัวสุดท้าย $a_1 + 3d$ ต้องไม่เกิน 15 นั่นคือ $a_1 + 3d \le 15$

กรณี $d = 1$: จะได้ $a_1 + 3(1) \le 15 \to a_1 \le 12 \to a_1 = 1, 2, \ldots, 12$ ทั้งหมด 12 แบบ

กรณี $d = 2$: จะได้ $a_1 + 3(2) \le 15 \to a_1 \le 9 \to a_1 = 1, 2, \ldots, 9$ ทั้งหมด 9 แบบ

กรณี $d = 1$: จะได้ $a_1 + 3(3) \le 15 \to a_1 \le 6 \to a_1 = 1, 2, \ldots, 6$ ทั้งหมด 6 แบบ

กรณี $d = 4$: จะได้ $a_1 + 3(4) \le 15 \to a_1 \le 3 \to a_1 = 1, 2, 3$ ทั้งหมด 3 แบบ

กรณี $d = 5$: จะได้ $a_1 + 3(5) \le 15 \to a_1 \le 0$ เป็นไปไม่ได้เพราะ a_1 ต้องเป็นจำนวนเต็มบวก จะเห็นว่า ถ้า $d > 5$ จงหา a_1 ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขไม่ได้แล้ว

รวมทุกกรณี จะได้จำนวนแบบ $= 12 + 9 + 6 + 3 = 30 \to$

ความน่าจะเป็น $= \frac{30}{15\cdot 7\cdot 13} = \frac{2}{7\cdot 13} = \frac{2}{91}$

9. **ตอบ 2**

วิธีทำ ให้ $z = x + yi$ จะได้ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ และ $\bar{z} = x - yi$ แทนสมการ แล้วจับกลุ่มจำนวนจริง กับจำนวน จินตภาพจะได้

$$\sqrt{x^2 + y^2} + 2(x - yi) - 3(x + yi) = 3 - 45i$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} + 2x - 2yi - 3x - 3yi = 3 - 45i$$
$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - x\right) - 5yi = 3 - 45i$$

เทียบส่วนจริง = ส่วนจริง และ ส่วนจินตภาพ = ส่วนจินตภาพจะได้ $\sqrt{x^2 + y^2} - x = 3$

และ $5y = 45$
$y = 9$

แทน $y = 9$ จะได้
$$\sqrt{x^2 + 9^2} - x = 3$$
$$\sqrt{x^2 + 9^2} = x + 3$$
$$x^2 + 81 = x^2 + 6x + 9$$
$$72 = 6x$$
$$12 = x$$

อย่าลืมตรวจคำตอบด้วย !!!
เพราะมีการยกกำลังสองทั้งสอง

จะได้ $|\bar{z}|^2 = |12 - 9i|^2 = \sqrt{12^2 + 9^2}^2 = 144 + 81 = 225$

10. **ตอบ 3**

วิธีทำ จัดรูปไฮเพอร์โบลา :

$$y^2-2\left(x^2-4x\right)=6$$

$$y^2-2\left(x^2-4x+4\right)=6-2(4)$$

$$y^2-2\left(x^2-2\right)^2=-2$$

$$\frac{y^2}{-2}-\frac{2(x-2)^2}{-2}=1$$

$$\frac{(x-2)^2}{1}-\frac{y^2}{2}=1 \longrightarrow \frac{(x-2)^2}{1}-\frac{y^2}{2}=0$$

หาสมการเส้นกำกับ ให้เปลี่ยน 1 ทางขวา เป็น 0 จะได้สมการกำกับคือ $\frac{(x-2)^2}{1}-\frac{y^2}{2}=0$

หาจุดตัดเส้นตรงกัน กับ ไฮเพอร์โบลา

แทน $y=\sqrt{2}$ ในสมการไฮเพอร์โบลา

$$\frac{(x-2)^2}{1}-\frac{\sqrt{2}^2}{2}=1$$

$$(x-2)^2-1=1$$

$$(x-2)^2=2$$

$$x-2=\sqrt{2},-\sqrt{2}$$

$$x=2+\sqrt{2},2-\sqrt{2}$$

หาจุดตัดเส้นตรง กับ เส้นกำกับ

แทน $y=\sqrt{2}$ ในสมการเส้นกำกับ

$$\frac{(x-2)^2}{1}-\frac{\sqrt{2}^2}{2}=0$$

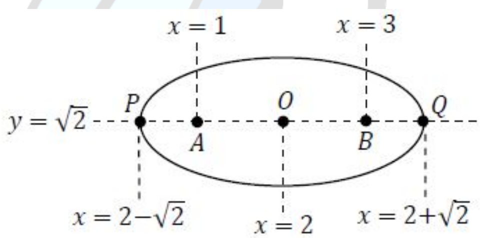
$$(x-2)^2-1=0$$

$$(x-2)^2=1$$

$$x-2=1,-1$$

$$x=3,1$$

วาดทั้ง 4 จุด จะได้วงรีแนวนอนดังรูป และจะได้จุดศูนย์กลาง $\left(2,\sqrt{2}\right)$ และ $a=OQ=\sqrt{2}, c=OB=1$



และจะได้ $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2-1}=1$

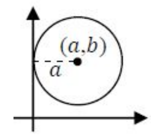
ดังนั้น สมการวงรีคือ $\frac{(x-2)^2}{\sqrt{2}^2}+\frac{\left(y-\sqrt{2}\right)^2}{1^2}=1$

$$1\left(x^2-4x+4\right)+2\left(y^2-2\sqrt{2y}+2\right)$$

$$x^2+2y^2-4x-4\sqrt{2y}+6$$

11. ตอบ 1

วิธีทำ ให้วงกลมมี ศก อยู่ที่ (a,b) เนื่องจาก ศก อยู่ในควอดรันต์ 1 ดังนั้น $a>0$ และ $b>0$



เนื่องจากวงกลมสัมผัสแกน y ดังนั้น วงกลมจะมีรัศมี r ยาวเท่ากับ a ดังรูป

ดังนั้น สมการวงกลม จะอยู่ในรูป $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=a^2$$

$$x^2+y^2-2ax+2by+b^2=0$$

เทียบกับ $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ จะได้ $D=-2a, E=-2b$ และ $F=b^2$ ...(1)

เนื่องจาก a เป็นบวก จะได้ D เป็นลบ ดังนั้น พาราโบลา $Dx=y^2+Ey+F$ เป็นพาราโบลาแบบเปิดซ้าย (เพราะกำลังสองอยู่ที่ y และ D เป็นลบ) จะได้รูปสมการคือ $(y-k)^2=-4c(x-h)$

โจทย์ให้ระยะโฟกัส $c=1$ แทนแล้วจัดในรูป $Dx=y^2+Ey+F$

จะได้ $y^2-2ky+k^2=-4x+4h$

$$y^2-2ky+k^2-4h=-4x$$

$$-4x=y^2-2ky+k^2-4h$$

เทียบกับ $Dx=y^2+Ey+F$ จะได้ $D=-4, E=-2k$ และ $F=k^2-4h$ ...(2)

พาราโบลาผ่าน $(-4,-1)$ ดังนั้นต้องแทนในสมการพาราโบลาแล้วเป็นจริง

$\rightarrow D(-4)=(-1)^2+E(-1)+F$ แทน $D=-4$ จาก (2) แทน $E=-2b, F=b^2$ จาก(1)

จะได้ $(-4)(-4)=(-1)^2+(-2b)(-1)+b^2$

$$16=1+2b+b^2$$

$$0=b^2+2b-15$$

$$0=(b+5)(b-3)$$

แต่ b เป็นบวก ดังนั้น $b=3$ แทนใน (1) จะได้ $E=-6,\ F=9$

ก. $D^2+E^2+F^2=(-4)^2+(-6)^2+9^2=16+36+81=133 \rightarrow$ ถูก

ข. วงกลม จะสัมผัสเส้นตรง เมื่อ ระยะจาก ศก ไปเส้นตรง $=$ รัศมี

จาก $(1): D=-2a$ จะได้ $-4=-2a \rightarrow a=2$ ดังนั้น ศก $(a,b)=(2,3)$ และรัศมี $=a=2$

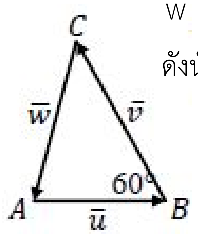
จากสูตรระยะห่างจากจุด (a,b) ไปเส้นตรง $Ax+By+C=0$ เท่ากับ $\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

จะได้ ระยะห่าง $(2,3)$ ไปเส้นตรง $4x+3y-7=0$ เท่ากับ

$\frac{|4(2)+3(3)-7|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{10}{5}=2=$ รัศมี $\rightarrow$ ถูก

12. ตอบ 4

วิธีทำ



$\bar{w} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = -\bar{v} - \bar{u}$

การ dot กระจายในการบวกลบเวกเตอร์ได้

ดังนั้น $(2\bar{u} - \bar{v}) \cdot \bar{w} = (2\bar{u} - \bar{v}) \cdot (-\bar{v} - \bar{u})$

$= -2\bar{u}\cdot\bar{v} - 2\bar{u}\cdot\bar{u} + \bar{v}\cdot\bar{v} + \bar{v}\cdot\bar{u}$

$\bar{v}\cdot\bar{u} = \bar{u}\cdot\bar{v}$

$\bar{u}\cdot\bar{u} = |\bar{u}|^2$

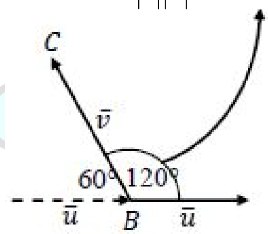
$= -\bar{u}\cdot\bar{v} \; - 2|\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2$

$= -|\bar{u}||\bar{v}| \cos 120^\circ - 2|\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2$

$\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}| \cos\theta$

เมื่อ θ เป็นมุมที่ $\bar{u}$ ทำกับ $\bar{v}$

แบบ<u>หัวต่อหัว</u> (หรือ<u>หางต่อหาง</u>)



$= -(5)(12)\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\left(5^2\right) + 12^2$

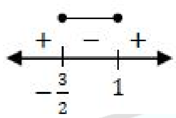
$= \quad 30 \quad - 50 + 144$

$= \quad 124$

13. ตอบ 4

วิธีทำ หา A : $2x^2 + x - 3 \le 0$

$(2x+3)(x-1) \le 0$



$x \in \left[-\frac{3}{2}, 1\right]$

และ $\cap$

$|x-2| \le 3$

$-3 \le x - 2 \le 3$

$-1 \le x \le 5$

$x \in [-1, 5]$

จะได้ส่วนที่ซ้อนทับกัน คือ $\left[-\frac{3}{2}, 1\right] \cap [-1, 5] = [-1, 1]$ ดังนั้น ถ้า เอกภพสัมพัทธ์ A อยู่ภายในช่วง $[-1,1]$ ก็จะทำให้ประพจน์อันแรกจริงได้ $\longrightarrow$ สังเกตว่า A <u>ไม่</u>จำเป็นต้องเท่ากับ $[-1,1]$ แค่ $A \subset [-1,1]$ ก็พอ <u>แต่</u> ถ้าคิดให้ $A \subset [-1,1]$ ข้อนี้จะไม่มีคำตอบ ดังนั้น คนออกข้อสอบน่าจะตั้งใจให้ $A = [-1,1]$ ซึ่งในกรณีนี้ ควรแก้ข้อความในโจทย์เป็น “ให้ A เป็นเอกภพสัมพัทธ์<u>ที่ใหญ่ที่สุด</u> ที่ทำให้ประพจน์ $\forall x\left[2x^2 + x \ldots\right.$ เป็นจริง”

หา B : $6x^{-2} - 5x^{-1} - 1 > 0$

$\frac{6}{x^2} - \frac{5}{x} - 1 > 0$

ไม่ควรคูณ x^2 ตลอด เพราะจะพลาดกรณีที่ $x = 0$

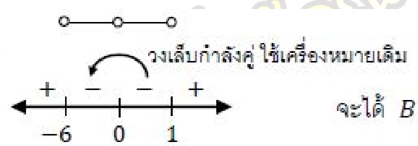
$\frac{6 - 5x - x^2}{x^2} > 0$

$\frac{-x^2 - 5x + 6}{x^2} > 0$

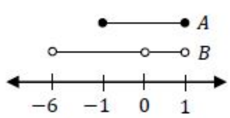
คูณ − ตลอด ต้องเปลี่ยน > เป็น <

$\frac{x^2 + 5x - 6}{x^2} < 0$

$\frac{(x+6)(x-1)}{x^2} > 0$



จะได้ $B = (-6, 0) \cup (0, 1)$



ก. $A \subset B$ ผิด เพราะ A มี 0 แต่ B ไม่มี $\longrightarrow$ ผิด

ข. $A - B = \{0, 1\}$ มี 2 ตัว $\longrightarrow$ ถูก

ค. $(A-B) \cup (B-A) = \{0,1\} \cup (-6,-1) \longrightarrow$ ผิด

ง. $(-6,0) \subset (B-A) = (-6,-1) \longrightarrow$ ผิด

14. ตอบ 4

วิธีทำ

$$\log_2(x-2y)^2+\frac{1}{-1}\log_2 x+\frac{1}{-1}\log_2 y=0$$
$$\log_2(x-2y)^2-\log_2 x-\log_2 y=0$$
$$\log_2\frac{(x-2y)^2}{xy}=0$$
$$\frac{(x-2y)^2}{xy}=1$$

$$(x-2y)^2=xy$$
$$x^2-4xy+4y^2=xy$$
$$x^2-5xy+4y^2=0$$
$$(x-4y)(x-y)=0$$
$x=4y$ หรือ $x=y$

แต่หลัง log ต้องเป็นบวก และโจทย์ให้ x,y เป็นบวก ดังนั้น $x=y$ ใช้ไม่ได้เพราะทำให้ $x-2y$ หลัง log ตัวแรก เป็นลบ $\longrightarrow$ เหลือ $x=4y\longrightarrow$ จะได้ $\frac{x}{y}=4$

ดังนั้น $\left(\frac{x}{y}\right)^2+1=4^2+1=17$

15. ตอบ 4

วิธีทำ ทุกตัวเป็นบวก $\longrightarrow$ ย้ายข้างแบบคูณหารได้โดยไม่ต้องกลับเครื่องหมายมากกว่าน้อยกว่า

ก. $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ คูณไขว้จะได้ $ad<bc$ ประโยคหลัง $\frac{a+x}{b}<\frac{c+x}{d}$ คูณไขว้จะได้ $ad+xd<bc+bx$

ดังนั้น ประโยคในข้อ ก. คือ ถ้า $ad<bc$ แล้ว $ad+xd<bc+bx$ ดังนี้

$$\begin{array}{c}ad<bc\\ \downarrow\\ ad+xd<bc+bx\end{array}$$

จะเห็นว่า ถ้า xd มากกว่า bx มากๆ ประโยคหลังจะผิดได้

นั่นคือ ถ้าให้ d มากกว่า b มากๆ ประโยคนี้จะผิด

เช่น $a=1,b=2,c=11,d=20$ จะได้ $\frac{1}{2}<\frac{11}{20}$ แต่ $\frac{1+1}{2}<\frac{11+1}{20}$ ผิด

ข. $\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+x}$

$ab+ax<ab+bx$

$ax<bx$ ดังนั้นถ้า $a>b$ ประโยคนี้จะผิด

$a<b\ \rightarrow$ เช่น ถ้า $a=2,b=1$ จะเห็นว่า $\frac{2}{1}<\frac{2+1}{1+1}$ ผิด

16. ตอบ 3

วิธีทำ $(f\circ g)(x) = \sqrt{x^2+5}$

ดิฟฟังก์ชันคอมโพสิต ด้วยกฎลูกโซ่ $(f\circ g)'(x) = \frac{1}{2}(x^2+5)^{-\frac{1}{2}}(2x)$ ดิฟด้วยกฎลูกโซ่

$f'(g(x))\cdot g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$ ...(*)

เราจะหา $g(x)$ และ $g'(x)$ มาแทนใน (*)

จาก $\int g(x)dx = x^2-4x+c$

$g(x) = 2x-4$ ดิฟทั้งสองข้าง ฝั่งซ้าย ดิฟจะตัดกับอินทิเกรตได้

$g'(x) = 2$

แทน $g(x)$ และ $g'(x)$ ที่ได้ใน (*) จะได้ $f'(0)\cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{2^2+5}} = \frac{2}{3} \longrightarrow$ หารด้วย 2 ตลอดได้

$f'(0) = \frac{1}{3}$ ดังนั้น L มีความชัน $= \frac{1}{3}$ ดังนั้น เส้นตรงที่ตั้งฉากกับ L ต้องมีความชัน $= -3$ (ตั้งฉากกันความชันคูณกันได้ -1) จะเห็นว่า ข้อ 3 คือ $y = -3x+5 \longrightarrow$ ชัน $= -3$

17. ตอบ 1

วิธีทำ ให้ L_1 ตัดแกน X และแกน Y ที่จุด $A(a,0)$ และ $B(0,b)$ จากโจทย์จะได้ $a+b=3$

$a = 3-b$ ...(1)

เนื่องจาก $(-2,-4)$, $A(a,0)$ และ $B(0,b)$ อยู่บนเส้นตรง L_1 เหมือนกัน ดังนั้น จะใช้จุดไหนมาหาความชันของ L_1 ก็ ต้องได้ความชันเท่ากัน นั่นคือ ความชันจาก $(-2,-4)$ ไป $A(a,0)$ จะเท่ากับ ความชันจาก $(-2,-4)$ ไป $B(0,b)$ จากสูตรความชัน $= \frac{\Delta y}{\Delta x}$ จะได้ $\frac{0-(-4)}{a-(-2)} = \frac{b-(-4)}{0-(-2)}$

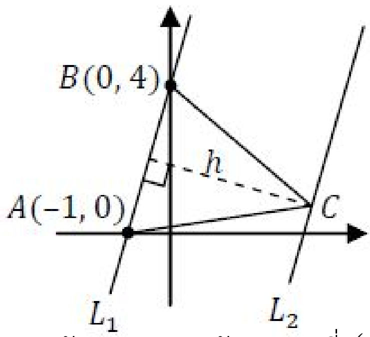
คูณไขว้ จะได้
$$\begin{aligned}(4)(2) &= (b+4)(a+2)\\ 8 &= (b+4)(3-b+2)\\ 8 &= (b+4)(5-b)\\ 8 &= 5b-b^2+20-4b\end{aligned}$$

แทน $a = 3-b$ จาก (1)

$$\begin{aligned}b^2-b-12 &= 0\\ (b-4)(b+3) &= 0\\ b &= 4, -3\end{aligned}$$

แต่ถ้า $b=-3$ จะได้ความชัน $L_1 = \frac{-3-(-4)}{0-(-2)} = \frac{1}{2}$ ใช้ไม่ได้ เพราะโจทย์ให้ความชัน L_1 เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $b=4$ จะได้ความชัน $L_1 = \frac{4-(-4)}{0-(-2)} = \frac{8}{2} = 4$ ใช้ได้ และจาก (1) จะได้

$a = 3-4 = -1$



จะได้ $A(-1,0)$ และ $B(0,4)$ ซึ่งวาดได้ดังรูป

จะได้พื้นที่ $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times AB \times h$ ...(*)

จะได้ $AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(-1-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{17}$

และ $h =$ ระยะระหว่าง L_1 กับ $L_2 = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

(จริงๆข้อนี้ ไม่ต้องบอก CA = CB มากก็ได้)

L_1 ชัน $= 4$ และตัดแกน Y ที่ $(0,4)$ ดังนั้น สมการ L_1 คือ $y = 4x + 4 \rightarrow$ จัดรูปได้ $L_1 : 4x - y + 4 = 0$ L_2 ขนาน L_1 ดังนั้น จะชัน $= 4$ ด้วย และ L_2 ตัดแกน Y ที่ $(0,-13)$ ดังนั้น สมการ L_2 คือ $y = 4x - 13 \rightarrow$ จัดรูปได้ $L_2 : 4x - y - 13 = 0$

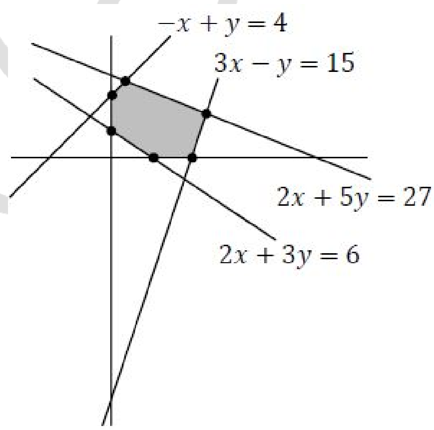
จะได้ $h = \frac{|4-(-3)|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \frac{17}{\sqrt{17}} \rightarrow$ แทนค่า AB กับ h ใน (*) จะได้

$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times \sqrt{17} \times \frac{17}{\sqrt{17}} = \frac{17}{2} = 8.5$

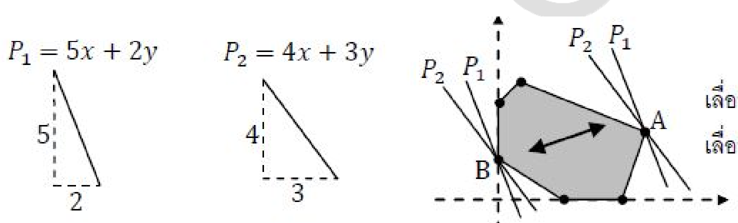
18. ตอบ 1

วิธีทำ หาจุดตัดแกน X (แทน $y = 0$) และจุดตัดแกน Y (แทน $x = 0$) ของสมการข้อจำกัด แล้ววาดกราฟหาพื้นที่ซ้อนทับกัน จะได้ดังรูป ($x \geq 0, y \geq 0$ คือ เอาเฉพาะบริเวณใน Q_1)

	$x = 0$	$y = 0$
$2x + 3y = 6$	$(0,2)$	$(3,0)$
$3x - y = 15$	$(0,-15)$	$(5,0)$
$-x + y = 4$	$(0,4)$	$(-4,0)$
$2x + 5y = 27$	$(0,5.4)$	$(13.5,0)$



หาจุดที่ได้ค่ามากสุด- น้อยสุดโดยการ "เลื่อนเส้นจุดประสงค์"



เลื่อน P_1, P_2 ได้มากสุดที่จุด A $\rightarrow$ ค่ามากสุด

เลื่อน P_1, P_2 ได้น้อยสุดที่จุด B $\rightarrow$ ค่าน้อยสุด

จะได้ จุด A ให้ค่า P_1,P_2 มากสุด และ จุด B ให้ค่า P_1,P_2 น้อยสุด

ถัดมา จะเทียบว่า $P_1=5x+2y$ กับ $P_2=4x+3y$ อันไหนมากกว่ากัน

จะเห็นว่า P_1 มี x มากกว่า P_2 อยู่ $5-4=1$ ตัว แต่ P_2 ก็มี y มากกว่า P_1 อยู่ $3-2=1$ ตัว เช่นกัน ดังนั้น ถ้า $x>y$ จะได้ $P_1>P_2$ แต่ถ้า $x<y$ จะได้ $P_1<P_2$

ค่ามากสุด : จุด A อยู่ใกล้แกน X มากกว่าแกน Y ดังนั้น จะมีพิกัด $x>y\rightarrow P_1>P_2\rightarrow M_1>M_2$ $\rightarrow$ ก. ถูก

ค่าน้อยสุด : จุด B อยู่บนแกน Y บวก จะมีพิกัด $x=0$ ดังนั้น

$x<y\rightarrow P_1<P_2\rightarrow N_1<N_2$ $\rightarrow$ ข. ถูก

19. ตอบ 4

วิธีทำ จาก $g'(x)=f(x)$ จะได้ $g'(x)=4x^3+bx^2+cx+d$ ...(1) ดังนั้น

$g'(0)=4\left(0^3\right)+b\left(0^2\right)+c(0)+d=d$ แต่โจทย์ให้ $g'(0)=0$ ดังนั้น $d=0$

$g'(1)=4\left(1^3\right)+b\left(1^2\right)+c(1)+0=4+b+c$ แต่โจทย์ให้ $g'(1)=0$ ดังนั้น

$4+b+c=0$...(*) จาก $d=0$ จะได้ $f(x)=4x^3+bx^2+cx$

ดังนั้น $\int_{-2}^{2} f(x)dx=x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2\Big|_{-2}^{2}=\left(16+\frac{8b}{3}+2c\right)-\left(16-\frac{8b}{3}+2c\right)=\frac{16b}{3}$

แต่โจทย์ให้ $\int_{-2}^{2} f(x)dx=-\frac{64}{3}$ ดังนั้น $\frac{16b}{3}=-\frac{64}{3}$ จะได้ $b=-4$ แทนใน (*) จะได้ $c=0$

แทน a,b,c,d ใน (1) จะได้ $g'(x)=4x^3-4x^2$ ...(2) $\rightarrow$ ดิฟจะได้ $g''(x)=12x^2-8x$ ...(3)

อินทิเกรต (2) จะได้ $g(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3+k$ ดังนั้น $g(0)=0^4-\frac{4}{3}\left(0^3\right)+k=k$

แต่โจทย์ให้ $g(0)=0$ ดังนั้น $k=0$ จะได้ $g''(x)=g'(x)+g(x)$

จะได้
$$\begin{aligned}12x^2-8x &= 4x^3-4x^2+x^4-\frac{4}{3}x^3\\ 0 &= x^4+\frac{8}{3}x^3-16x^2+8x\\ 0 &= 3x^4+8x^3-48x^2+24x\end{aligned}$$

20. ตอบ 2

วิธีทำ แทนหาพจน์ต่าง ๆ
$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{1}{6}=\frac{1}{2\cdot 3}\\
a_2 &= a_1-\frac{1}{3^2}=\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2\cdot 3^2}\\
a_3 &= a_2-\frac{1}{3^3}=\frac{1}{2\cdot 3^2}-\frac{1}{3^3}=\frac{1}{3^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3^2}\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2\cdot 3^3}\\
a_4 &= a_3-\frac{1}{3^4}=\frac{1}{2\cdot 3^3}-\frac{1}{3^4}=\frac{1}{3^3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3^3}\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2\cdot 3^4}\end{aligned}$$

จะเห็นว่า เราทำซ้ำแบบนี้ไปได้เรื่อยๆ และจากแบบรูปที่ได้ จะสรุปได้ว่า $a_n = \frac{1}{2\cdot 3^n}$

ก. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\cdot 3^n} = 0 \to$ ก. ถูก

อนุกรมเรขาคณิตอนันต์ $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$ เมื่อ $|r|<1$

ข. $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{2\cdot 3^3} + \ldots = \frac{\frac{1}{2\cdot 3}}{1-\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{4} = 0.25 \to$ ข. ผิด

21. ตอบ 3

วิธีทำ ก. ข้อนี้ จะแทนตัวเลขก็ได้ ไม่ว่าแทนอะไร ประโยคนี้จะผิดหมด เนื่องจาก $ab=24$ จะได้ $b=\frac{24}{a}$

และจาก $cd=8$ จะได้ $d=\frac{8}{c}$ แทนใน $d>b$ จะได้เป็น $\frac{8}{c}>\frac{24}{a}$

$a>3c$

<u>ตัวเศษ</u> : เนื่องจาก $a>3c>c$ จะได้ $\sqrt{a}>\sqrt{c}$ ...(1)

<u>ตัวส่วน</u> : เนื่องจาก $a,c>0$ ดังนั้น $(c+1)^b,(a+1)^d$ มีฐาน $>1 \to$ ยิ่งยกกำลังมาก ค่าจะยิ่งมาก และเนื่องจาก $c<a$ และ $b<d$ ดังนั้น $(c+1)^b<(a+1)^d$

กลับเศษกลับส่วนต้องกลับเครื่องหมาย

$\frac{1}{(c+1)^b}>\frac{1}{(a+1)^d}$ ...(2)

$(1)\times(2)$ จะได้ $\frac{\sqrt{a}}{(c+1)^b}>\frac{\sqrt{c}}{(a+1)^d} \to$ ก. ผิด

ข. ทำแบบเดียวกับข้อ ก. แต่ไปเน้นที่ a กับ c แทน เนื่องจาก $ab=24$ จะได้ $a=\frac{24}{b}$

และจาก $cd=8$ จะได้ $c=\frac{8}{d}$ แทนใน $a<c$ จะได้เป็น $\frac{24}{b}<\frac{8}{d}$

$3d<b$

เนื่องจากฐาน 0.01 กับ $0.05<1 \to$ ยิ่งยกกำลังมาก ค่าจะยิ่งน้อย

ดังนั้น $(0.01)^b<(0.01)^{3d}=\left(0.01^3\right)^d=(0.000001)^d<(0.05)^d \to$ ข. ถูก

22. ตอบ 4

วิธีทำ จะใช้วิธีนับแบบตรงข้าม คือ เอาจำนวนแบบทั้งหมด ลบด้วยจำนวนแบบที่โจทย์ไม่ต้องการ นั่นคือ #จำนวนสามหลักลดที่มากกว่า 500 = # จำนวนสามหลักลดทั้งหมด − # จำนวนสามหลักลดที่ไม่เกิน 500 จำนวนสามหลักลดทั้งหมด : เลือก 3 ตัว จาก $0,1,\ldots,9\,(=10$ แบบ) แล้วเอาตัวมากเป็นหลักร้อย, ตัวกลางเป็นหลักสิบ , ตัวน้อยเป็นหลักหน่วย จะได้จำนวนสามหลักลดทั้งหมด $\to$ เลือกได้ $\binom{10}{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120$ แบบ จำนวนสามหลักลดที่ไม่เกิน 500 : เนื่องจาก 500 ไม่ใช่จำนวนสามหลัก ดังนั้น หลักร้อยต้องเป็น 4 ลงไป และจำนวนสามหลักลด จะมีหลักสิบกับหลักหน่วยที่น้อยลงไปเรื่อยๆ ดังนั้น ทั้งสามหลักจะเกิดจาก $0,1,2,3,4$ เท่านั้น $\to$ เลือก 3 ตัว จาก $0,1,2,3,4\,(=5$ แบบ) แล้วเอาตัวมากเป็นหลักร้อย, ตัวกลางเป็นหลักสิบ, ตัวน้อยเป็นหลักหน่วย จะได้จำนวนสามหลักลดทั้งหมดที่ไม่เกิน 500 $\to$ เลือกได้ $\binom{5}{3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1}=10$ แบบ จะได้จำนวนแบบที่

โจทย์ต้องการ $=120-10=110$ แบบ

23. ตอบ 4

วิธีทำ ให้จำนวนน้อยสุด $=a$, จำนวนมากสุด $=b$ จาก โจทย์ จะได้ว่า $\dfrac{a+\text{ผลบวกจำนวนตรงกลาง}+b}{n}=22$

$\dfrac{\text{ผลบวกจำนวนตรงกลาง}+b}{n-1}=24$

หักออก 1 ตัว เหลือ $n-1$ ตัว ← $\dfrac{a+\text{ผลบวกจำนวนตรงกลาง}}{n-1}=15$

หักออก 2 ตัว เหลือ $n-2$ ตัว ← $\dfrac{\text{ผลบวกจำนวนตรงกลาง}}{n-2}=16$

ย้ายตัวส่วนขึ้นไปคูณทางขวา จะได้ $a+\text{ผลบวกจำนวนตรงกลาง}+b = 22n$ ...(1)

$\text{ผลบวกจำนวนตรงกลาง}+b = 24n-24$ ...(2)

$a+\text{ผลบวกจำนวนตรงกลาง} = 15n-15$ ...(3)

$\text{ผลบวกจำนวนตรงกลาง} = 16n-32$ ...(4)

$(1)-(2)$: $a=22n-(24n-24) = -2n+24$ ...(5)

$(3)-(4)$: $a=(15n-15)-(16n-32) = -n+17$ ...(6)

จะเห็นว่า ฝั่งซ้ายของ (5) กับ (6) เป็น a ทั้งคู่ ดังนั้น ฝั่งขวาของ (5) กับ (6) ต้องเท่ากัน

$-2n+24=-n+17$

$7=n$

แทน $n=7$ ใน (6) จะได้ $a=-7+17=10$

และเอา $(2)-(4)$ จะได้ $b=(24n-24)-(16n-32)=8n+8=8(7)+8=64$

ก. พิสัย $=$ มากสุด – น้อยสุด $=b-a=64-10=54 \longrightarrow$ ก. ผิด

ข. $n=7 \longrightarrow$ ข. ผิด

24. ตอบ 3

วิธีทำ ก. จากสมบัติของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน จะได้ว่า L ต้องผ่านจุดกึ่งกลางของข้อมูล คือ L ต้องผ่าน $(\overline{X},\overline{Y})$ จะเห็นว่า $\overline{X}=\dfrac{1+2+3+4+5}{5}=\dfrac{15}{5}=3$ ดังนั้น L ต้องผ่าน $(3,\overline{y})$

แต่โจทย์ให้ L ผ่าน $(3,b)$ ดังนั้น $b=\overline{y}$

$$b = \frac{9+11+b+17+19}{5}$$

$$5b = b+56$$

$$b = 14$$ $\longrightarrow$ ก. ผิด

ข. การเปลี่ยนของ y เทียบกับ x จะขึ้นกับค่า m ที่ในสมการทำนาย $\hat{y} = c + mx$

แทน $b = 14$ ในตาราง

x	1	2	3	4	5	$\sum x = 15$
y	9	11	14	17	19	$\sum x = 70$
x^2	1	4	9	16	25	$\sum x^2 = 55$
xy	9	22	42	68	95	$\sum xy = 236$

จากสูตร $\sum y = cn + m\sum x$

$\sum xy = c\sum x + m\sum x^2$

จะได้ $70 = 5c + 15m \quad ...(1)$

$236 = 15c + 55m \quad ...(2)$

$(2) - 3(1) : 26 = 10m \longrightarrow$ จะได้ $m = 2.6$ ดังนั้น สมการทำนายคือ $\hat{y} = c + 2.6x$

เนื่องจาก x ถูก 2.6 คูณอยู่ ดังนั้น ถ้า x เพิ่ม 1 แล้ว y จะเพิ่ม 2.6

ถ้า x เพิ่ม 0.5 แล้ว y จะเพิ่ม $\frac{2.6}{1} x 0.5 = 1.3 \longrightarrow$ ข. ถูก

25. ตอบ 4

วิธีทำ ก. สปส การแปรผัน $= \frac{s}{\bar{X}} \longrightarrow$ ต้องเทียบ s กับ $\bar{x}$ ของข้อมูลทั้งสองชุด

จะเห็นว่า ข้อมูลชุดที่ 2 ได้จากการเอาข้อมูลชุดแรก คูณ 2 แล้วบวก 1

ดังนั้น $\bar{X}_{\text{ชุด 2}}$ จะสัมพันธ์กับ $\bar{X}_{\text{ชุด 1}}$ ในลักษณะเดียวกัน คือ $\bar{X}_{\text{ชุด 2}} = 2\bar{X}_{\text{ชุด1}} + 1 \quad ...(1)$

แต่การบวก 1 จะไม่มีผลกับค่า s (เพราะ ถ้าทุกตัวบวก 1 เท่าๆกัน ข้อมูลจะยังกระจายตัวเท่าเดิม)

แต่การคูณ 2 จะทำ ให้ s เพิ่ม 2 เท่า นั่นคือ $S_{\text{ชุด 2}} = 2s_{\text{ชุด1}} \quad ...(2)$

$$\text{จะได้ สปส การแปรผัน}_{\text{ชุด 2}} = \frac{S_{\text{ชุด}}}{\bar{X}_{\text{ชุด 2}}} \xrightarrow[\text{จาก }(1)]{\text{จาก }(2)} \frac{2s_{\text{ชุด 1}}}{2\bar{X}_{\text{ชุด 1}} + 1} \underset{\longrightarrow}{\leq} \frac{2s_{\text{ชุด 1}}}{2\bar{X}_{\text{ชุด 1}}} = \frac{S_{\text{ชุด 1}}}{\bar{X}_{\text{ชุด 1}}} = \text{สปส การแปรผัน}_{\text{ชุด 1}}$$

ตัวหารน้อยลง $\longrightarrow$ ค่ามากขึ้น โดยกรณีที่เศษเป็น 0 ค่าจะยังเท่าเดิมได้

ดังนั้น สปส การแปรผัน$_{\text{ชุด 2}} \leq$ สปส การแปรผัน$_{\text{ชุด 1}} \longrightarrow$ ก. ผิด (เพราะ เท่ากันได้ ถ้าข้อมูลทุกตัวเท่ากัน จะได้ $s = 0$) (แต่ถ้าโจทย์ให้ x บางคู่ไม่เท่ากัน จะได้ $s \neq 0$ แล้วข้อ ก. จะถูก)

ข. สปส พิสัย $= \frac{\max - \min}{\max + \min}$ และจาก $\max_{\text{ชุด 2}} = 2\max_{\text{ชุด1}} + 1$ และ $\min_{\text{ชุด 2}} = 2\min_{\text{ชุด 1}} + 1$

$$\text{จะได้ สปส พิสัย}_{\text{ชุด 2}} = \frac{\max_{\text{ชุด 2}} - \min_{\text{ชุด 2}}}{\max_{\text{ชุด 2}} + \min_{\text{ชุด 2}}} = \frac{\left(2\max_{\text{ชุด 1}} + 1\right) - \left(2\min_{\text{ชุด 1}} + 1\right)}{\left(2\max_{\text{ชุด 1}} + 1\right) + \left(2\min_{\text{ชุด 1}} + 1\right)} = \frac{2\max_{\text{ชุด 1}} - 2\min_{\text{ชุด 1}}}{2\max_{\text{ชุด 1}} + 2\min_{\text{ชุด 1}} + 2}$$

$$= \frac{2\left(\max_{\text{ชุด1}} - \min_{\text{ชุด1}}\right)}{2\left(\max_{\text{ชุด1}} + \min_{\text{ชุด1}} + 1\right)} = \frac{\max_{\text{ชุด1}} - \min_{\text{ชุด1}}}{\max_{\text{ชุด1}} + \min_{\text{ชุด1}} + 1} \underset{\longrightarrow}{\leq} \frac{\max_{\text{ชุด1}} - \min_{\text{ชุด1}}}{\max_{\text{ชุด1}} + \min_{\text{ชุด1}}} = \text{สปส พิสัย}_{\text{ชุด 1}}$$

ตัวหารน้อยลง $\longrightarrow$ ค่ามากขึ้น โดยกรณีที่ เศษเป็น 0 ค่าจะยังเท่าเดิมได้

ดังนั้น สปส พิสัย$_{\text{ชุด 2}} \leq$ สปส พิสัย$_{\text{ชุด 1}} \longrightarrow$ ข้อ ข. ผิด

26. ตอบ 4

วิธีทำ ก. เนื่องจาก A , B ไม่ใช่เมทริกซ์จัตุรัส ดังนั้น จะใช้กฎ $\det(AB)=(\det A)(\det B)$ ไม่ได้

ซึ่งจะทำให้เราไม่รู้ว่า $\det(AB)$ กับ $\det(BA)$ เท่ากันหรือไม่

จะเห็นว่า $ABC\begin{bmatrix}1 & 6\\1 & 14\end{bmatrix}$ ยังไม่ค่อยเกี่ยวกับข้อ ก. เพราะไม่ว่า A , B จะเป็นอะไร จะหา C ได้โดยการย้ายข้าง AB ได้เป็น $C=(AB)^{-1}\begin{bmatrix}1 & 6\\1 & 14\end{bmatrix}$ ได้เสมอ ขอแค่ $\det(AB)\neq 0$ เพื่อให้หา $(AB)^{-1}$ ได้

ลองสุ่ม A , B มาแทนดู ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$

จะได้ $AB=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

จะได้ $\det(AB)=1\neq 0$, $\det(BA)=0$ ดังนั้น $\det(AB)-\det(BA)=1\longrightarrow$ ก. ผิด

ข. จาก $C=\begin{bmatrix}-1 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}$ และจากสูตรอินเวอร์ส $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}$

จะได้ $C^{-1}=\frac{1}{(-1)(2)-(1)(2)}\begin{bmatrix}2 & -2\\-1 & -1\end{bmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & -2\\-1 & -1\end{bmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-2 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$

จาก $ABC=\begin{bmatrix}1 & 6\\1 & 14\end{bmatrix}$ ย้ายข้าง C จะได้ $AB=\begin{bmatrix}1 & 6\\1 & 14\end{bmatrix}C^{-1}$

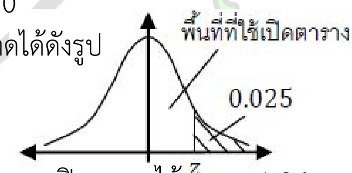
$$=\begin{bmatrix}1 & 6\\1 & 14\end{bmatrix}\left(\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-2 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4 & 8\\12 & 16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$$

ดังนั้น $CAB=C(AB)=\begin{bmatrix}-1 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 10\end{bmatrix}\longrightarrow$ ข. ผิด

27. ตอบ 3

วิธีทำ มากกว่า 84.5 คะแนน $=4$ คน $\longrightarrow$ คิดเป็นจำนวนนักเรียนร้อยละ $\frac{4}{160}\times 100=2.5\%$

$\longrightarrow$ คิดเป็นพื้นที่ใต้โค้ง 0.025 ซึ่งจะวาดได้ดังรูป



แต่พื้นที่ที่ใช้เปิดตาราง จะเป็นพื้นที่ที่วัดจากแกนกลางไปทางขวา

ดังนั้น พื้นที่ที่ใช้เปิดตาราง $=$ พื้นที่ฝั่งขวาทั้งหมด -0.025

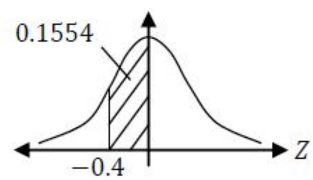
$=$ 0.5 $-0.025=0.475\longrightarrow$ เปิดตารางได้ $z=1.96$

ดังนั้น ข้อมูล $x=84.5$ จะมี $z=1.96$ แทนในสูตร $z=\frac{x-\bar{X}}{s}$ จะได้ $1.96=\frac{84.5-60}{s}$

$$s=\frac{24.5}{1.96}=\frac{2450}{196}=12.5$$

และจะได้ ข้อมูล $x=55$ จะมี $z=\frac{55-60}{12.5}=-\frac{50}{125}=-0.4\longrightarrow$ เป็นลบ $\longrightarrow$ พื้นที่อยู่ทางซ้าย

เอา $z=0.4$ ไปเปิดตาราง ได้พื้นที่ $=0.1554$ จะวาดได้ดังรูป



หาเปอร์เซนไทล์ ต้องดูว่ามีข้อมูลได้น้อยกว่า $z=-0.4$ มีพื้นที่

$=0.5-0.1554 \quad =0.3446 \quad =34.46\%$

ดังนั้น $x=55$ จะเท่ากับเปอร์เซนไทล์ที่ 34.46

28. ตอบ 1

วิธีทำ มัธยฐาน $=15$ จะได้ข้อมูลเรียงจากน้อยไปมาก คือ a , b ,15 , c , d

ข้อมูลมาเป็นตัวๆ จะได้ตำแหน่ง $Q_r = \frac{r(N+1)}{4}$

ดังนั้น Q_1 อยู่ตัวที่ $\frac{1(5+1)}{4} = 1.5 =$ ตรงกลางระหว่างตัวที่ 1 กับ 2 $\rightarrow Q_1 = \frac{a+b}{2}$

Q_3 อยู่ตัวที่ $\frac{3(5+1)}{4} = 4.5 =$ ตรงกลางระหว่างตัวที่ 4 กับ 5 $\rightarrow Q_3 = \frac{c+d}{2}$

จากค่าเฉลี่ย Q_1 กับ Q_3 = มัธยฐาน จะได้ $\frac{Q_1+Q_3}{2} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} = 15 \rightarrow \frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2} = 30$

$\rightarrow a+b+c+d = 60$

จะได้ $\overline{X} = \frac{a+b+15+c+d}{5} = \frac{(a+b+c+d)+15}{5} = \frac{60+15}{5} = 15$

จากส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย $= \frac{\sum|x_i-\overline{x}|}{N} = 2.8$ จะได้ $\frac{|a-15|+|b-15|+|15-15|+|c-15|+|d-15|}{5} = 2.8$

$a.\ b < 15 \rightarrow |a-15| = 15-a$

$|b-15| = 15-b$

$c,d > 15 \rightarrow |c-15| = c-15$

$|d-15| = d-15$

$\frac{15-a+15-b+0+c-15+d-15}{5} = 2.8$

$-a-b+c+d = 14$

$(c+d)-(a+b) = 14$

ดังนั้น จะได้ ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ $= \frac{Q_3-Q_1}{2} = \frac{\frac{c+d}{2}-\frac{a+b}{2}}{2} = \frac{\frac{(c+d)-(a+b)}{2}}{2} = \frac{\frac{14}{2}}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$

29. ตอบ 2

วิธีทำ แปลงเป็น sin ให้หมด จะได้

$$\frac{\sin^4 x}{5} + \frac{\cos^4 x}{7} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{\sin^4 x}{5} + \frac{\left(1-\sin^2 x\right)^2}{7} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{7\sin^4 x + 5\left(1-2\sin^2 x+\sin^4 x\right)}{35} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{12\sin^4 x + 5 - 10\sin^2 x}{35} = \frac{1}{12}$$

$$144\sin^4 x + 60 - 120\sin^2 x = 35$$

$$144\sin^4 x - 120\sin^2 x + 15 = 0$$

$$\left(12\sin^2 x - 5\right)^2 = 0$$

$$\sin^2 x = \frac{5}{12}$$

ดังนั้น $\frac{\sin^2(2x)}{5} + \frac{\cos^2(2x)}{7}$

$$= \frac{\left(2\sin x\cos x\right)^2}{5} + \frac{\left(1-2\sin^2 x\right)^2}{7}$$

$$= \frac{4\sin^2 x\cos^2 x}{5} + \frac{\left(1-2\sin^2 x\right)^2}{7}$$

$$= \frac{4\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)}{5} + \frac{\left(1-2\sin^2 x\right)^2}{7}$$

$$= \frac{4\left(\frac{1}{12}\right)\left(1-\frac{5}{12}\right)}{5} + \frac{\left(1-2\left(\frac{5}{12}\right)\right)^2}{7}$$

$$= \frac{7}{36} + \frac{1}{7(36)}$$

$$= \frac{49+1}{252} = \frac{50}{252} = \frac{25}{126}$$

30. ตอบ 1

วิธีทำ ข้อนี้จะแก้ระบบสมหารก็ได้ อีกวิธีคือใช้ทักษะการเปรียบเทียบเบื้องต้น ดังนี้

จาก $B = C + D$ เราจะสรุปได้ว่า B จะมากกว่า C และ D

จาก $A = 2C - B$ จะได้ $A + B = C + C$ เนื่องจาก B มากกว่า C ดังนั้น A ต้องน้อยกว่า c จึงจะทำให้สองฝั่งเท่ากันได้ $\longrightarrow A < c < B$ ...(1)

$>$

ต้อง $<$

จาก $D = A + c - B$ จะได้ $D + B = A + C$ เนื่องจาก B มากกว่า C ดังนั้น D ต้องน้อยกว่า A จึงจะทำให้สองฝั่งเท่ากันได้ $\longrightarrow D < A$ ...(2)

$<$

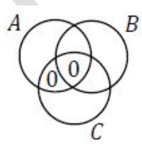
ต้อง $<$

จาก (1) และ (2) จะได้ $D < A < C < B$

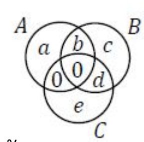
31. ตอบ 7

วิธีทำ

จาก $A \cap C = \varnothing$ จะได้



กำหนดให้แต่ละส่วนเป็นดังนี้



จาก $n(U) = 20$ และ $n(A') = 12$ จะได้ $n(A) = 20 - 12 = 8$ ดังนั้น $a + b = 8$ ...(1)

และ $n(B') = 9$ จะได้ $n(B) = 20 - 9 = 11$ ดังนั้น $b + c + d = 11$ ...(2)

และ $n(C') = 15$ จะได้ $n(C) = 20 - 15 = 5$ ดังนั้น $d + e = 5$ ...(3)

จาก $n((A-B)\cup(B-A))=11$ จะได้ $a+c+d=11$ ...(4)

จาก $n((B-C)\cup(C-B))=12$ จะได้ $b+c+e=12$ ...(5)

จะเห็นว่า (2) และ (4) เหมือนกันหมด ยกเว้น a กับ b ดังนั้น จะสรุปได้ว่า $a=b$

และจาก (1) จะได้ว่า $a=b=4$ แทนใน (2) จะได้ $c+d=7$ ...(6)) ลบกัน จะได้

แทนใน (5) จะได้ $c+e=8$ ...(7)) $d-e=-1$ ...(9)

$(9)+(3)$: e จะตัดกันได้ เหลือ $2d=4\longrightarrow d=2$ แทนใน (3) ได้ $e=3$ แทนใน (6) ได้ $c=5$ ดังนั้น $n((A-B)\cup(C-B))=a+e=4+3=7$

32. ตอบ 169

วิธีทำ หา A : สังเกตว่า มุมเพิ่มทีละ 72° เท่าๆ กัน ซึ่ง $72^\circ=\frac{360^\circ}{5}$ พอดี ดังนั้น มุมทั้ง 5 จะเหมือนกับตอนหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน ที่มีรากทั้ง 5 ตัว คือ

$$\begin{aligned}&\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ\\&\cos 87^\circ + i\sin 87^\circ\\&\cos 159^\circ + i\sin 159^\circ\\&\cos 231^\circ + i\sin 231^\circ\\&\cos 303^\circ + i\sin 303^\circ\end{aligned}$$

มุมเพิ่มทีละ $\frac{360^\circ}{5}=72^\circ$

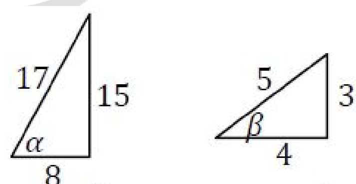
ซึ่งรากที่ 5 ทั้ง 5 ตัว จะต้องสอดคล้องกับสมการในรูป $Z^5=$ จำนวนคงที่ (เช่นในข้อนี้ คือ $z^5=1\ \text{cis}\ 75^\circ$) และจากสูตรผลบวกราก จะได้ผลบวกของรากทั้ง 5 ตัว $=\frac{0}{1}=0$

ดังนั้น ส่วนจริงของผลบวก $=\cos 15^\circ+\cos 87^\circ+\cos 159^\circ+\cos 231^\circ+\cos 303^\circ$ ต้องเป็น $0\longrightarrow A=0$ หา B : ภายใน arc เป็นบวก $\longrightarrow$ ใช้สามเหลี่ยมมาช่วยได้โดยไม่ต้องระวังเครื่องหมาย

ให้ $a=\arctan\frac{15}{8}$ จะได้ $\tan a=\frac{15}{8}$

ให้ $\beta=\arccos\frac{4}{5}$ จะได้ $\cos\beta=\frac{4}{5}$

วาด $\triangle$ แล้วพีทากอรัสหาด้านที่เหลือ จะได้รูป



$\tan\alpha=\frac{15}{8}$ $\cos\beta=\frac{4}{5}$

ดังนั้น

$$B=\sin\left(\arctan\left(\frac{15}{8}\right)+\arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right)=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$=\left(\frac{15}{17}\right)\left(\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{8}{17}\right)\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{84}{85}$$

ดังนั้น $A+B=0+\frac{84}{85}=\frac{84}{85}=\frac{a}{b}$ ดังนั้น $a+b=84+85=169$

33. ตอบ 3

วิธีทำ จากสูตร $\left|z_1+z_2\right|^2=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+\left(\bar{z}_2+\bar{z}_1 z_2\right)$

$\left|z_1-z_2\right|^2=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+\left(\bar{z}_2+\bar{z}_1 z_2\right)$

บวกสองสูตร จะได้ $\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_1+z_2\right|^2=2\left|z_1\right|^2+2\left|z_2\right|^2$

$\left|z_1+z_2\right|^2 \quad 1^2 \quad =2\left(\sqrt{2}\right)^2+2\left(\sqrt{3}\right)^2$

$\left|z_1+z_2\right|^2 \quad =9$

$\left|z_1+z_2\right| \quad =3$ (ค่าสัมบูรณ์ต้องเป็นบวก)

34. ตอบ 66

วิธีทำ สลับข้างสมการแรก ให้มีรูปคล้ายกับสมการที่สอง จะได้ $b^a=ab$ ...(1)

$b=ab^{3a}$ ..(2)

สังเกตว่า b เท่านั้น ที่เป็นฐานของเลขยกกำลัง ดังนั้น เราจะพยายามกำจัด a ที่คูณอยู่กับเลขยกกำลังออก เนื่องจาก $a,b\neq 0$ เอา $(1)\div(2)$ จะทำให้ a ตัดกันได้ $\rightarrow \frac{b^a}{b}=\frac{b}{b^{3a}}\rightarrow b^{4a}=b^2$

เนื่องจาก $b>1$ จะตัดฐาน *b* ทั้งสองข้างได้ เหลือ $4a=2\rightarrow a=\frac{1}{2}$

แทน $a=\frac{1}{2}$ ใน (1) จะได้ $b^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}b\rightarrow 2\sqrt{b}=b$ ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ $4b=b^2$

$0=b^2-4b$

$0=b(b-4)$

จะได้ $b=0,4$ แต่ $b>1$ ดังนั้น $b=4\rightarrow$ จะได้ $20a+14b=20\left(\frac{1}{2}\right)+14(4)=10+56=66$

35. ตอบ 201

วิธีทำ จาก $b_n=(a+n-1)(a+n)$ จะได้ $b_1=(a)(a+1)$

$b_2=(a+1)(a+2)$

$b_3=(a+2)(a+3)$

$\vdots$

ดังนั้น $\frac{a+1}{b_1b_2}+\frac{a+2}{b_2b_3}+\ldots+\frac{a+n}{b_nb_{n+1}}=\frac{a+1}{(a)(a+1)^2(a+2)}+\frac{a+2}{(a+1)(a+2)^2(a+3)}$

$+\ldots+\frac{a+n}{(a+n-1)(a+2)^2(a+n+1)}=\frac{1}{(a)(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)}$

$+\ldots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)(a+n+1)}$

ตัวส่วน มี 3 ตัวคูณ ดังนั้นต้องแยกเทเลสโคปิคด้วยรูปแบบ $\frac{1}{abc}\rightarrow\frac{1}{ab}-\frac{1}{bc}$

เช่น $\frac{1}{(a)(a+1)(a+2)}$ จะต้องแยกเป็น $\frac{1}{(a)(a+1)}-\frac{1}{(a+1)(a+2)}$ จะได้ตัวส่วนที่เป็น ค.ร.น ตรงกัน

ถัดมา ต้องปรับตัวเศษ $\longrightarrow$ เนื่องจาก $\frac{1}{(a)(a+1)}-\frac{1}{(a+1)(a+2)}=\frac{(a+2)-(a)}{(a)(a+1)(a+2)}=\frac{2}{(a)(a+1)(a+2)}$

ดังนั้น $\frac{1}{(a)(a+1)(a+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a)(a+1)}-\frac{1}{(a+1)(a+2)}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a)(a+1)}-\frac{1}{(a+1)(a+2)}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a+1)(a+2)}-\frac{1}{(a+2)(a+3)}\right]+\ldots$

ตัวตรงกลางจะตัดกันได้เป็นทอดๆ เหลือตัวแรกกับตัวสุดท้าย

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}-\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a)(a+1)}-\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}-\frac{1}{(a+2)(a+3)}+\ldots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}-\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a)(a+1)}-\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}\right]$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a+1}{b_1b_2}+\frac{a+2}{b_2b_3}+\ldots+\frac{a+n}{b_nb_{n+1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a)(a+1)}-\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a)(a+1)}-0\right]=\frac{1}{2a(a+1)}$$

ดังนั้น $=\frac{1}{2a(a+1)}=\frac{1}{312}\rightarrow a(a+1)=156$

$$a^2+a-156=0$$

$$(a+13)(a-12)=0$$

แต่ a เป็นบวก ดังนั้น $a=12$ จะได้ $a^2+57=12^2+57=144+57=201$

36. ตอบ 3

วิธีทำ จัดรูป จะได้ $\begin{bmatrix}|x| & 1\\ 2 & x-|y|\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2y & 6\\ -2 & 2|y|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10+x & 7\\ 0 & 7-y\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}|x|+2y & 1\\ 0 & x+|y|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10+x & 7\\ 0 & 7-y\end{bmatrix}$$

จับสมาชิกในตำแหน่งตรงกันมาเท่ากัน จะได้ $|x|+2y=10+x$ ...(1)

$x+|y|=7-y$ ...(2)

สังเกตว่า ถ้า $x>0$ จะได้ $|x|=x$ ทำให้ตัด x ใน (1) ได้ เหลือ $2y=10\rightarrow y=5$

แต่ถ้า $y=5$ จะได้สมการ (2) คือ $x+5=2\rightarrow x=-3$ ขัดแย้งกับที่ $x\geq 0$

ดังนั้น $x\geq 0$ ไม่ได้ จึงสรุปได้ว่า $x<0$

และสังเกตว่า ถ้า $y<0$ จะได้ $|y|=-y$ ทำให้ตัด $-y$ ใน (2) ได้ เหลือ $y=7$

ซึ่งจะขัดแย้งกับ $x<0$ ดังนั้น $y<0$ ไม่ได้ จึงสรุปได้ว่า $y>0$

$$|a|=\begin{cases}a & , \quad a\geq 0\\ -a & , \quad a<0\end{cases}$$

จาก $x<0$ และ $y>0$ จะได้ $|x|=-x$ และ $|y|=y$ แทนใน (1) และ (2) จะได้

$$-x+2y=10+x \qquad -2x+2y=10$$

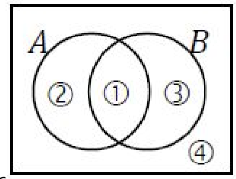
$$x+y=7-y \quad\rightarrow\quad x+2y=7$$

$(4)-(3)$: y จะตัดกันได้ เหลือ $3x=-3\rightarrow x=-1$

แทน $x=-1$ ใน (4) จะได้ $2y=8\rightarrow y=4$ ดังนั้น $x+y=-1+4=3$

37. ตอบ 270

วิธีทำ ข้อนี้ ถามว่า มี A,B ได้กี่แบบนั่นเอง ซึ่งสามารถนับจากจำนวนแบบของแผนภาพได้



ขั้นที่ 1 : จาก $n(A\cap B)=2$ จะได้ส่วน 1 ต้องมี 2 ตัว

เลือก 2 ตัว จาก $\mathcal{U}=\{1,2,3,4,5\}$ ได้ $\binom{5}{2}=\frac{(5)(4)}{2}=10$ แบบ

ขั้นที่ 2 : $\mathcal{U}$ ที่เหลือ 3 ตัว แต่ละตัวลง 2 หรือ 3 หรือ 4 ช่องใดช่องหนึ่งเพียงช่องเดียว

นั่นคือ แต่ละตัวใน 3 ตัวที่เหลือ จะเลือกได้ตัวละ 3 แบบ จะได้จำนวนแบบ

$=(3)(3)(3)$ แบบ

ดังนั้น จำนวนแบบของแผนภาพ $=(10)(3)(3)(3)=270$ แบบ

38. ตอบ 14

วิธีทำ $\{a_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิต ดังนั้น จะสอดคล้องกับสูตร $a_n=a_1+(n-1)d$

แต่โจทย์ให้ $a_1=2$ แทนในสูตร จะได้ $a_n=2+(n-1)d$ ...(*)

และ a_2,a_4,a_8 เป็นเรขาคณิต จะได้ $\frac{a_4}{a_2}=\frac{a_8}{a_4}\rightarrow$ ใช้สูตรจาก (*) จะได้ $\frac{2+3d}{2+d}=\frac{2+7d}{2+3d}$

$$(2+3d)(2+3d)=(2+d)(2+7d)$$
$$4+12d+9d^2=4+16d+7d^2$$
$$2d^2-4d=0$$
$$2d(d-2)=0\quad\rightarrow\quad d=0,2$$

แต่ $d=0$ ไม่ได้ เพราะถ้า $d=0$ จะทำให้ $a_1=a_2=a_3=\ldots$ ขัดแย้งกับที่ $a_1<a_2<a_3<\ldots$ ดังนั้น จะสรุปได้ว่า $d=2$ และจะได้ $a_n=2+(n-1)(2)=2n\rightarrow$ จะได้ลำดับนี้คือ 2,4,6,8,...

ดังนั้น $\dfrac{(a_1-1)^3+(a_2-1)^3+\ldots+(a_n-1)^3}{a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3}=\dfrac{1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3}{2^3+4^3+6^3+\ldots+(2n)^3}$ เอาเศษมาเติมเข้าและหักออกด้วยพจน์เลขคู่

$$=\frac{\left[1^3+2^3+3^3+\ldots+(2n)^3\right]-\left[2^3+4^3+6^3\ldots+(2n)^3\right]}{2^3+4^3+6^3\ldots+(2n)^3}$$

กระจายเศษเข้าไปหาร

$$=\frac{\left[1^3+2^3+3^3+\ldots+(2n)^3\right]}{2^3+4^3+6^3\ldots+(2n)^3}-1$$

ดึง 2^3 เป็นตัวร่วม

$$=\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+(2n)^3}{2^3\left(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3\right)}-1$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^3=\left[\frac{n(n+1)}{n}\right]^2}$$

ใช้สูตร

$$=\frac{\left[\frac{2n(2n+1)}{2}\right]^2}{2^3\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}-1=\frac{n^2(2n+1)^2}{2n^2(n+1)^2}-1=\frac{(2n+1)^2}{2(n+1)^2}-1$$

ดังนั้น

$$\frac{(2n+1)^2}{2(n+1)^2}-1=\frac{391}{450}$$

$$\frac{(2n+1)^2}{2(n+1)^2}=\frac{841}{450}$$

$$\frac{(2n+1)^2}{(n+1)^2}=\frac{841}{225}$$

$$\frac{2n+1}{n+1}=\pm\sqrt{\frac{841}{225}}$$ (ฝั่งซ้ายเป็นบวก)

$$\frac{2n+1}{n+1}=\frac{29}{15}$$

$$30n+15=29n+29$$

$$n=14$$

39. ตอบ 11

วิธีทำ สังเกตว่า $(2+x)(2-x)=4-x^2$

ดังนั้น ถ้า $A=\sqrt{2+x},\ B=\sqrt{2-x}$ จะได้ฝั่งซ้ายคือ $3A-6B+4AB$

ถัดมา จะพยายามจัดฝั่งขวาให้อยู่ในรูปของ A,B นั่นคือ ต้องเขียน $10-3x$ ให้อยู่ในรูปของ $2+x$ กับ $2-x$ ลองเดาๆ ดูจะได้ $(2+x)+4(2-x)=10-3x$

(หรือจะให้ $m(2+x)+n(2-x)=10-3x$

เทียบ สปส เป็น $2m+2n=10$ แล้วแก้หา m,n ก็ได้)

$m-n=-3$

ดังนั้น $10-3x=(2+x)+4(2-x)=A^2+4B^2$

ดังนั้น สมการจะกลายเป็น $3A-6B+4AB=A^2+4B^2$

$$0=A^2+4B^2-3A+6B+4AB$$ จับกลุ่มดึงตัวร่วม

$$0=\left(A^2-4AB+4B^2\right)-3A+6B$$

$$0=(A-2B)^2-3(A-2B)$$

$$0=(A-2B)(A-2B-3)$$

$A-2B=0$

$A=2B$

$\sqrt{2+x}=2\sqrt{2-x}$

$2+x=4(2-x)$

$2+x=8-4x$

$5x=6$

$x=\frac{6}{5}$

ตรวจคำตอบในบรรทัดก่อนยกกำลังสองก็พอ $\sqrt{\frac{16}{5}}=2\sqrt{\frac{4}{5}}$ จริง

$A-2B=0$

$A=2B$

จาก $\sqrt{2-x}$ ในสมการโจทย์ จะได้ $2-x\geq 0$

ดังนั้น $2\geq x$ จะได้ค่ามากสุดของ x คือ 2

จะได้มี A มีค่าอย่างมาก $=\sqrt{2+x_{max}}=\sqrt{2+2}=2$

แต่ $2B+3$ มีค่าอย่างน้อย 3 (เพราะ B เป็นค่าติดรูท จะ ≥ 0) ดังนั้น $A=2b+3$ จึงเป็นไปไม่ได้

จะได้คำตอบ $\frac{6}{5}$ ดังนั้น $a=b, b=5$ จะได้ $a+b=6+5=11$

40. ตอบ 55

วิธีทำ

$$8\cos 2\theta+\frac{8}{\cos 2\theta}=65$$

$$8\cos^2 2\theta+8=65\cos 2\theta$$

$$8\cos^2 2\theta-65\cos 2\theta+8=0$$

$$\left(8\cos 2\theta-1\right)\left(\cos 2\theta-8\right)=0$$

$$\cos 2\theta=\frac{1}{8},8$$

แต่ cos เกิน 1 ไม่ได้ ดังนั้น $\cos 2\theta=\frac{1}{8}$...(1)

$$\cos 2\theta=\frac{1}{8}$$

$$2\cos^2\theta-1=\frac{1}{8}$$

$$\cos^2\theta=\frac{9}{16}$$

$$\cos\theta=\pm\frac{3}{4}$$

แต่ $0<\theta<90^\circ$ จะได้ cos เป็นบวก ดังนั้น $\cos\theta=\frac{3}{4}$...(2)

$$160\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{5\theta}{2}=\frac{160}{-2}\left(-2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{5\theta}{2}\right)$$

$$=-80\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\theta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{5\theta}{2}\right)\right)$$

$$=-80\left(\cos 3\theta-\cos(-2\theta)\right)$$

$$=-80\left(\cos 3\theta-\cos 2\theta\right)$$

$$=-80\left(4\cos^3\theta-3\cos\theta-\cos 2\theta\right)$$

$$=-80\left(4\left(\frac{3}{4}\right)^3-3\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{8}\right)$$

$$=-80\left(\frac{27}{16}-\frac{9}{4}-\frac{1}{8}\right)=80\left(\frac{27-36-2}{16}\right)=-80\left(\frac{-11}{16}\right)55$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos(A+B)-\cos(A-B)\\&=-2\sin A\sin B\end{aligned}}$$

41. ตอบ 34.5

วิธีทำ $\underbrace{f(2x-1)}_{k}=4x^2-10x+a$ จัดรูปหา $f(x)$ ก่อนให้ $2x-1=k$ จะได้ $x=\frac{k+1}{2}$

แทนค่า x จะได้ $f(k)=4\left(\frac{k+1}{2}\right)^2-10\left(\frac{k+1}{2}\right)+a$

$=k^2+2k+1-5k-5+a$

$=k^2-3k-4+a$

ดังนั้น $f(x)=x^2-3x-4+a$

จาก $f(0)=12$ จะได้ $0^2-3(0)-4+a=12$ แก้สมการจะได้ $a=16$

ดังนั้น $f(x)=x^2-3x-4+16=x^2-3x+12$

และจะได้

$$\int_1^4 f(x)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+12x\Big|_1^4=\left(\frac{4^3}{3}-\frac{3(4^2)}{2}+12(4)\right)-\left(\frac{1^3}{3}-\frac{3(1^2)}{2}+12(1)\right)$$

$$=\frac{64}{3}-24+48-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-12$$

$$=\frac{63}{3}+12+\frac{3}{4}\qquad=34.5$$

42. ตอบ 36

วิธีทำ จากสมบัติของฟังก์ชันคอมโพสิท จะได้ $f\left(g^{-1}(1+a)\right)=g\left(f^{-1}(1+4)\right)$

หาได้โดย เอา $f(x)$ มาแทน x ด้วย $g^{-1}(1+a)$

จาก $g(x)=2f(x)+5$

แทน x ด้วย $g^{-1}(1+a)$

$g\left(g^{-1}(1+a)\right)=2f\left(g^{-1}(1+a)\right)+5$

g กับ g^{-1} จะตัดกันได้

$1+a=2f\left(g^{-1}(1+a)\right)+5$

$\frac{1+a-5}{2}=f\left(g^{-1}(1+a)\right)$

หาได้โดย เอา $g(x)$มาแทน x ด้วย $f^{-1}(1+a)$

จาก $g(x)=2f(x)+5$

แทน x ด้วย $f^{-1}(1+a)$

$g\left(g^{-1}(1+a)\right)=2f\left(f^{-1}(1+a)\right)+5$

f กับ f^{-1} จะตัดกันได้

$g\left(g^{-1}(1+a)\right)=2(1+a)+5$

$g\left(g^{-1}(1+a)\right)=2a+7$

จับสองฝั่งมาเท่ากัน จะได้ $\frac{1+a-5}{2}=2a+7$

$a-4=4a+14$

$-18=3a$

$-6=a\qquad\rightarrow a^2=36$

43. ตอบ 3.5

วิธีทำ สังเกตว่า ถ้าเอาสองตัวข้างในฝั่งขวามาบวกกัน จะได้ $2^x - 4 + 4^x - 2 = 2^x + 4^x - 6$ เหมือนข้างในฝั่งซ้าย ดังนั้น ถ้าให้ $a = 2^x - 4, b = 4^x - 2$ จะได้สมการคือ $(a+b)^3 = a^3 + b^3$

$$\begin{aligned} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 &= a^3 + b^3 \\ 3a^2b + 3ab^2 &= 0 \\ 3ab(a+b) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ 2^x - 4 &= 0 \\ 2^x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 0 \\ 4^x - 2 &= 0 \\ 2^{2x} &= 2 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ 4^x + 2^x - 6 &= 0 \\ \left(2^x + 3\right)\left(2^x - 2\right) &= 0 \\ 2^x &= -3,\ 2 \\ x &= -,\ 1 \end{aligned}$$

จะได้ผลบวกคำตอบ $= 2 + \frac{1}{2} + 1 = 3.5$

44. ตอบ 4

วิธีทำ จาก $g(f(x)) = x^2 + 2x - 1$ จะได้ $g(\underbrace{x+1}_{k}) = x^2 + 2x - 1$

จัดรูป หา $g(x)$ ให้ $k = x + 1$

$k - 1 = x \longrightarrow$ แทนได้ $g(k) = (k-1)^2 + 2(k-1) - 1$

$= k^2 - 2k + 1 + 2k - 2 - 1 \quad = k^2 - 2$

ดังนั้น $g(x) = x^2 - 2$

$$\boxed{\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

จากนิยาม จะได้ $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(g(x+h))^2 - (g(x))^2}{h} = \dfrac{d}{dx}(g(x))^2$

$= \dfrac{d}{dx}\left(x^2 - 2\right)^2$ ดิฟลูกโซ่

$= 2\left(x^2 - 2\right)(2x)$

ดังนั้น $s(x) = 2\left(x^2 - 2\right)(2x)$

ดังนั้น $(sg)(1) = s(1) \cdot g(1) = 2\left(1^2 - 2\right)(2(1)) \cdot \left(1^2 - 2\right) = (-4) \cdot (-1) = 4$

45. ตอบ 1277

วิธีทำ เพื่อความสะดวก จะใช้ตารางช่วย โดยให้ $a(i,j)$ คือ ช่องในแถวที่ i หลักที่ j

จาก (ก) $a(n,0)=n+1$ จะได้ $a(0,0)=0+1=1$ จะเติมหลักที่ 0 ได้ดังรูป

$a(1,0)=1+1=2$

$a(2,0)=2+1=3$

$a(3,0)=3+1=4$

$\vdots$

	0	1	2	3
0	1			
1	2			
2	3			
3	4			
4	⋮			

ถัดมา จะมาหลักที่ 1

จาก (ข) แทน $m=1$ จะได้ $a(0,1)=a(1,1-1)$

$=a(1,0)=2$ เติมได้ดังรูป

	0	1	2	3
0	1	2		
1	2			
2	3			
3	4			
4	⋮			

จาก (ค) แทน $m=0$ จะได้ $a(n+1,0+1)=a(a(n,0+1),0)$

$a(n+1,+1) \quad =a(a(n,1),0)$

จาก (ก) $a(?????,0)=????+1$

$$a(n+1,1) \quad = \quad a(n,1)+1$$

ความหมายของสูตรที่ได้คือ ใน <u>หลักที่ 1</u> ช่องถัดลงมา $(n+1)$ จะเท่ากับช่องก่อนหน้า (n) บวก 1

	0	1	2	3
0	1	2	+1	
1	2	3	+1	
2	3	4	+1	
3	4	5		
4	⋮	⋮		

จะเติมช่องที่เหลือของหลักที่ 1 ได้ดังรูป

จะเห็นว่า ตัวเลขในหลักที่ 1 เรียงเป็นลำดับเลขคณิตที่

$a_0=2,\ a_1=3,\ d=1$ จากสูตร $a_n=a_1+(n-1)d$

จะได้ หลักที่ 1 มีสูตร คือ $a(n,1)=3+(n-1)(1)$

$=n+2 \quad \ldots(*)$

	0	1	2	3
0	1	2	3	
1	2	3		
2	3	4		
3	4	5		
4	⋮	⋮		

ถัดมา จะทำซ้ำแบบเดิม เพื่อหาหลักที่ 2

จาก (ข) แทน $m=2$ จะได้ $a(0,2)=a(1,2-1)$

$=a(1,1) \quad =3$ เติมได้ดังรูป

จาก (ค) แทน $m=1$ จะได้ $a(n+1,1+1)=a\big(a(n,1+1),1\big)$

$a(n+1,+2) \quad =a\big(a(n,2),1\big)$

จาก (*) $\qquad a(?????,1)=????+2$

$$a(n+1,2) \quad = \quad a(n,2)+2$$

ความหมายของสูตรที่ได้คือ ใน <u>หลักที่ 2</u> ช่องถัดลงมา $(n+1)$ จะเท่ากับช่องก่อนหน้า (n) บวก 2

	0	1	2	3
0	1	2	3	
1	2	3	5	
2	3	4	7	
3	4	5	9	
4	⋮	⋮		

จะเติมช่องที่เหลือของหลักที่ 2 ได้ดังรูป

จะเห็นว่า ตัวเลขในหลักที่ 2 เรียงเป็นลำดับเลขคณิตที่ $a_0=3,\ a_1=5,\ \ d=2$

จากสูตร $\ a_n=a_1+(n-1)d$

ดังนั้น หลักที่ 2 มีสูตร คือ $a(n,2)=5+(n-1)(2)$

$=2n+3 \qquad \ldots(**)$

โจทย์ให้ $a(x,2)=2557$ ใช้สูตร $(**)$ จะได้ $2x+3=2557$

$$x \quad =\frac{2557-3}{2}=\frac{2554}{2}=1277$$