เฉลย

1. 5	11. 3	21. 4	31. 7	41.10
2. 4	12. 4	22. 1	32. 38	42.2.5
3. 2	13. 5	23. 3	33. 6	43.4
4. 2	14. 5	24. 2	34. 24	44.72
5. 3	15. 5	25. 5	35. 62	45.109
6. 3	16. 5	26. 3	36. 63	
7. 1	17. 3	27. 1	37. 9	
8. 1	18. 4	28. 2	38. 81	
9. 4	19. 3	29. 2	39. 4	
10. 1	20. 4	30. 2	40. 52	

แนวคิด

1. ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า $A - B = \varnothing$ แล้ว $A = B$

(ข) ถ้า $C - (A \cap B) = C - B$ แล้ว $A \subset B$

(ค) $A \cap B \cap C = [(A \cup B) \cap C] \cap [(A \cap B) \cup C]$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

ตอบ 5

(ก) ลบ คือการกรองออก $\longrightarrow$ ถ้า B มีทุกตัวใน A ก็จะทำให้ $A-B=\varnothing$ ได้

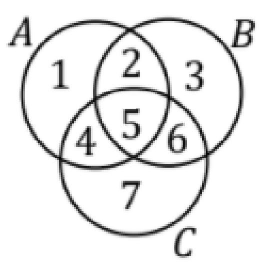
เช่น $\{1\}-\{1,2\}=\varnothing$ แต่ $\{1\}\neq\{1,2\}\longrightarrow$ (ก) ผิด

(ข) ลองหาตัวอย่างค้านดู จะเห็นว่าถ้า $C=\varnothing$ เอาไปลบกับอะไรก็ได้ $\varnothing$ โดยที่ A กับ B จะเป็นอะไรก็ได้ เช่นให้ $C=\varnothing$, $A=\{1\}$, $B=\{2\}$ จะได้

$$\begin{aligned}\varnothing-\left(\{1\}\cap\{2\}\right) &= \varnothing-\{2\}\\ C-\left(A\cap B\right) &= C-B\\ \varnothing-\varnothing &= \varnothing-\{2\}\\ \varnothing &= \varnothing\end{aligned}$$

แต่ $\{1\}\neq\{2\}\longrightarrow$ (ข) ผิด

(ค) กำหนดสมาชิกตัวแทนให้แต่ละส่วน ดังรูป



$A\cap B\cap C=[(A\cup B)\cap C]\cap[(A\cap B)\cup C]$

$\{5\}=[\{1,2,3,4,5,6\}\cap\{4,5,6,7\}]\cap[\{2,5\}\cup\{4,5,6,7\}]$

$\{5\}=\{4,5,6\}\cap\{2,4,5,6,7\}$

$\{5\}=\{4,5,6\}\longrightarrow$ (ค) ผิด

2. จากการสำรวจนักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 80 คน เกี่ยวกับการเป็นสมาชิกของชมรม 3 ชมรม คือ ชมรมคณิตศาสตร์ ชมรมการแสดง และชมรมกีฬา ปรากฏว่ามี 30 คน เป็นสมาชิกของชมรมคณิตศาสตร์ โดยในจำนวนนี้มีนักเรียน 20คน เท่านั้นที่เป็นสมาชิกของชมรมคณิตศาสตร์เพียงชมรมเดียว มี 5 คน ที่เป็นสมาชิกของชมรมการแสดงและชมรมกีฬา แต่ไม่เป็นสมาชิกของชมรมคณิตศาสตร์ และมี 10 คน ที่ไม่เป็นสมาชิกของชมรมใดเลย พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) มี 15 คน ที่เป็นสมาชิกของชมรมอย่างน้อย 2 ชมรม

(ข) มี 55 คน ที่เป็นสมาชิกของชมรมใดชมรมหนึ่งเพียง 1 ชมรมเท่านั้น

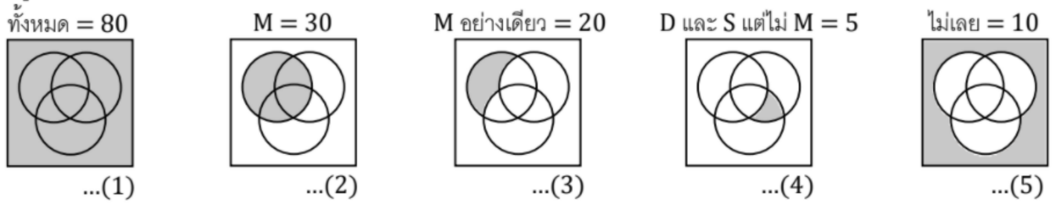
(ค) มี 50 คน ที่เป็นสมาชิกของชมรมการแสดงหรือชมรมกีฬา

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

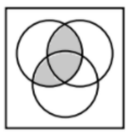
1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

ตอบ 4

จากข้อมูลที่ได้ สามารถวาดแผนภาพได้ดังนี้ (M = คณิต , D = การแสดง , S = กีฬา)

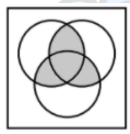


(ก) $(2)-(3)$



$30-20=10$ ...(6)

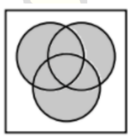
$(6)+(4)$



$10+5=15$ ...(7)

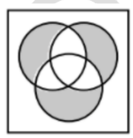
⟶ จากรูปที่ (7) จะได้ (ก) ถูก

(ข) $(1)-(5)$



$80+10=70$ ...(8)

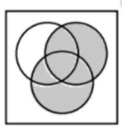
$(8)+(7)$



$70-15=55$ ...(9)

⟶ จากรูปที่ (9) จะได้ (ข) ถูก

(ค) $(8)-(3)$

70 −  ..(10)

⟶ จากรูปที่ (10) จะได้ (ค) ถูก

3. กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ โดยที่ $[p \rightarrow (q \rightarrow \sim r)] \wedge q$ มีค่าความจริงเป็น <u>จริง</u>
ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้ มีค่าความจริงเป็น <u>เท็จ</u>

1. $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r)$
2. $(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge r)$
3. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee r)$
4. $q \rightarrow (\sim p \wedge r)$
5. $\sim (p \wedge q) \rightarrow (q \wedge \sim r)$

<u>ตอบ 2</u>

$[p \rightarrow (q \rightarrow \sim r)] \wedge q$ เป็นจริง แสดงว่า $p \rightarrow (q \rightarrow \sim r) \equiv T$ และ $q \equiv T$

$$\boxed{\begin{aligned} p \rightarrow q &\equiv \sim p \vee q \\ \sim(p \wedge q) &\equiv \sim p \vee \sim q \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} \sim p \vee \sim q \vee \sim r &\equiv T \\ \sim(p \wedge q \wedge r) &\equiv T \\ p \wedge q \wedge r &\equiv F \\ p \wedge T \wedge r &\equiv F \\ p \wedge r &\equiv F \end{aligned}$$

ดังนั้น จะสรุปได้ว่า $q \equiv T$ และ $p \wedge r \equiv F$ (อาจเป็น $T \wedge F$, $F \wedge T$, หรือ $F \wedge F$ ก็ได้)

1. $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r)$

$(p \wedge T) \leftrightarrow F$

$p \leftrightarrow F$

เป็น T ได้ เมื่อ $p \equiv F$

2. $(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge r)$

$(p \vee T) \leftrightarrow F$

$T \leftrightarrow F$

F

3. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee r)$

$(p \rightarrow T) \leftrightarrow (p \vee r)$

$T \leftrightarrow (p \vee r)$

เป็น T ได้ เมื่อ $p \equiv T$

4. $q \rightarrow (\sim p \wedge r)$

$T \rightarrow (\sim p \wedge r)$

เป็น T ได้ เมื่อ $p \equiv F$, $r \equiv T$

5. $\sim (p \wedge q) \rightarrow (q \wedge \sim r)$

$\sim (p \wedge T) \rightarrow (T \wedge \sim r)$

$\sim (p) \rightarrow (\sim r)$

เป็น T ได้ เมื่อ $p \equiv T$

4. ค่าของ $2\left(\arctan\frac{1}{8} - \arctan\frac{2}{3}\right)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\arcsin\frac{4}{5}$
2. $-\arcsin\frac{4}{5}$
3. $\pi - \arcsin\frac{4}{5}$
4. $-\arctan\frac{3}{4}$
5. $\pi - \arctan\frac{3}{4}$

ตอบ 2

ให้ $A = \arctan\frac{1}{8}$ ให้ $B = \arctan\frac{2}{3}$ $\longrightarrow$ จะได้ $2\left(\arctan\frac{1}{8} - \arctan\frac{2}{3}\right) = 2(A - B)$

$\tan A = \frac{1}{8}$ $\tan B = \frac{2}{3}$

จากสูตร จะได้ $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B} = \frac{\frac{1}{8} - \frac{2}{3}}{1 + \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{-\frac{13}{24}}{\frac{26}{24}} = -\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\tan 2(A - B) = \frac{2\tan(A - B)}{1 + \tan^2(A - B)} = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$$\boxed{\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}}$$

$= \frac{-1}{\frac{3}{4}} = -\frac{3}{4}$

ถึงจะรู้ว่า $\tan 2(A - B) = -\frac{4}{3}$ แต่ยังสรุปว่า $2(A - B) = \arctan -\frac{4}{3}$ ไม่ได้

เพราะยังไม่รู้ว่า $2(A - B)$ อยู่ในเรนจ์ของ arctan หรือไม่ $\longrightarrow$ ต้องหาควอดรันต์ของ $2(A - B)$ ก่อน

เนื่องจาก $0 < \frac{1}{8} < \frac{2}{3} < 1$ ดังนั้น $\arctan 0 < \arctan\frac{1}{8} < \arctan\frac{2}{3} < \arctan 1$ ctan

$0 < A < B < 45^\circ$

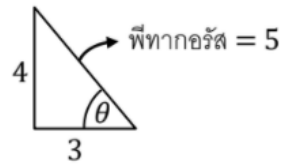
จากขอบเขตที่ได้ จะเห็นว่า $A < B$ และต่างกันได้ไม่เกิน 45° ซึ่งจะได้ $-45^\circ < A - B < 0$

$-90^\circ < 2(A - B) < 0$

ดังนั้น $2(A - B)$ อยู่ในเรนจ์ของ arctan จึงสรุปได้ว่า $2(A - B) = \arctan -\frac{4}{3}$ ซึ่งไม่ตรงกับตัวเลือกไหนเลย

ถัดไป จะลองเปลี่ยน arctan $-\frac{4}{3}$ เป็น arcsin ให้เหมือนตัวเลือกข้อ 1. ถึง 3. ดู

คิดค่าบวกก่อน : ให้ $\theta =$ arctan $\frac{4}{3}$ จะได้ $\tan\theta = \frac{4}{3} = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$ $\rightarrow$ วาดได้ดังรูป



จะได้ $\sin\theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{4}{5}$ ดังนั้น $\theta =$ arcsin $\frac{4}{5}$

ดังนั้น $\arctan -\frac{4}{3} = -\arctan\frac{4}{3} = -\arcsin\frac{4}{5}$

5. กำหนดให้ $a = \cos 50^\circ + \cos 20^\circ$ และ $b = \sin 50^\circ - \sin 20^\circ$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\sin 20^\circ = \frac{a^2+b^2}{2}$
2. $\sin 2\ 35^\circ = \frac{a^2+b^2}{4}$
3. $\cos 2\ 35^\circ = ab$
4. $\tan 2\ 35^\circ = \frac{a^2+b^2}{4ab}$
5. $\cos 70^\circ = (a+b)^2 - 1$

ตอบ 3

$a = \cos 50^\circ + \cos 20^\circ$

จะจัดรูปได้ $= 2\cos\frac{50^\circ + 20^\circ}{2}\cos\frac{50^\circ - 20^\circ}{2}$

$= 2\cos 35^\circ \cos 15^\circ$

$b = \sin 50^\circ + \cos 20^\circ$

$= 2\cos\frac{50^\circ + 20^\circ}{2}\sin\frac{50^\circ - 20^\circ}{2}$

$= 2\cos 35^\circ \sin 15^\circ$

$$a^2 + b^2 = 4\cos^2 35^\circ \cos^2 15^\circ + 4\cos^2 35^\circ \sin^2 15^\circ$$
$$= 4\cos^2 35^\circ\left(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ\right)$$
$$= 4\cos^2 35^\circ$$

$$ab = 4\sin^2 15^\circ \cos 15^\circ \cos^2 35$$
$$= 2\left(2\sin 15^\circ \cos 15^\circ\right)\cos^2 35^\circ$$
$$= 2\sin 30^\circ \cos^2 35^\circ$$
$$= \cos^2 35^\circ$$

1. $\sin 20^{\circ} = \dfrac{a^2+b^2}{2}$

$\cos 70^{\circ} = \dfrac{4\cos^2 35^{\circ}}{2}$

$2\cos^2 35^{\circ} - 1 = \cos^2 35^{\circ}$

$-1 = 0$ ✗

2. $\sin^2 35^{\circ} = \dfrac{a^2+b^2}{4}$

$\sin^2 35^{\circ} = \dfrac{4\cos^2 35^{\circ}}{4}$

$\sin^2 35^{\circ} = \cos^2 35^{\circ}$ ✗

3. $\cos^2 35^{\circ} = ab$

$\cos^2 35^{\circ} = \cos^2 35^{\circ}$ ✓

4. $\tan^2 35^{\circ} = \dfrac{a^2+b^2}{4ab}$

$\tan^2 35^{\circ} = \dfrac{4\cos^2 35^{\circ}}{4\cos^2 35^{\circ}}$

$\tan^2 35^{\circ} = 1$ ✗

5. $\cos 70^{\circ} = (a+b)^2 - 1$

$2\cos^2 35^{\circ} - 1 = a^2 + b^2 + 2ab - 1$

$2\cos^2 35^{\circ} = 4\cos^2 35^{\circ} + 2\cos^2 35^{\circ}$

$2\cos^2 35^{\circ} = 6\cos^2 35^{\circ}$ ✗

6. ให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่เท่ากับเวกเตอร์ศูนย์อยู่บนระนาบเดียวกัน โดยที่ $\bar{u} - \bar{v} - \bar{w} = \bar{0}$, $|\bar{u}| = \sqrt{2}|\bar{w}|$ และ $|\bar{v}| = \sqrt{3}|\bar{w}|$ ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ แล้ว $\sin\theta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 4. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 5. $\frac{1}{3}$

ตอบ 3

$$\bar{u}-\bar{v}-\bar{w} = \bar{0}$$

$$\bar{u}-\bar{v} = \bar{w}$$

$$\left|\bar{u}-\bar{v}\right|^2 = |\bar{w}|^2$$

$$\left|\bar{u}\right|^2+\left|\bar{v}\right|^2-2\bar{u}.\bar{v} = |\bar{w}|^2$$

$$\left|\bar{u}\right|^2+\left|\bar{v}\right|^2-2|\bar{u}|\,|\bar{v}|\cos\theta = |\bar{w}|^2$$

$$\left(\sqrt{2}|\bar{w}|\right)^2+\left(\sqrt{3}|\bar{w}|\right)^2-2\left(\sqrt{2}|\bar{w}|\right)\left(\sqrt{3}|\bar{w}|\right) = |\bar{w}|^2$$

$$2+3-2\sqrt{6}\cos\theta = 1$$

$$4 = 2\sqrt{6}\cos\theta$$

$$\frac{2}{\sqrt{6}} = \cos\theta$$

ถัดไปหา $\sin\theta$ จากสูตร

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta+\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2\theta = 1-\frac{4}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

แต่มุมระหว่างเวกเตอร์ อยู่ในช่วง 0° ถึง 180° ซึ่งมีค่า sin เป็นบวก $\longrightarrow$ จะได้

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

7. กำหนดให้ $0 < \theta < 90^\circ$ ถ้า $m=\frac{1}{4}\left(1+\sin\theta\right)\cot\theta$ และ $n=\frac{1}{4}\left(1+\sin\theta\right)\cot\theta$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\left(m^2-n^2\right)^2=mn$ (ข) $\sin\theta=\frac{m-n}{m+n}$ (ค) $m^2+n^2=\frac{1}{8}\cot^2\theta\cos^2\theta$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

ตอบ 1

$$m+n = \frac{1}{4}\left(1+\sin\theta\right)\cot\theta - \frac{1}{4}\left(1-\sin\theta\right)\cot\theta$$

$$= \frac{1}{4}\cot\theta\left(1+\sin\theta+1-\sin\theta\right)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(2) \qquad = \frac{\cos\theta}{2\sin\theta}$$

$$mn = \frac{1}{16}\left(1+\sin\theta\right)\left(1-\sin\theta\right)\cot^2\theta$$

$$= \frac{1}{16}\left(1-\sin^2\theta\right)\cot^2\theta$$

$$= \frac{1}{16}\cos^2\theta \qquad \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\cos^4\theta}{16\sin^2\theta}$$

$$m-n = \frac{1}{4}\left(1+\sin\theta\right)\cot\theta - \frac{1}{4}\left(1-\sin\theta\right)\cot\theta$$

$$= \frac{1}{4}\cot\theta\left(1+\sin\theta-\left(1-\sin\theta\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cot\theta\left(1+\sin\theta-1+\sin\theta\right)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(2\sin\theta\right) \qquad = \frac{\cos\theta}{2}$$

(ก) $\left(m^2-n^2\right)^2 = mn$

$((m-n)(m+n))^2 = mn$

$\left(\frac{\cos\theta}{2}\cdot\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}\right)^2 = \frac{\cos^4\theta}{16\sin^2\theta}$ ✓

(ข) $\sin\theta = \frac{m-n}{m+n}$

$\sin\theta(m+n) = m-n$

$\sin\theta\frac{\cos\theta}{2\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{2}$ ✓

(ค) $m^2+n^2 = \frac{1}{8}\cot^2\theta\cos^2\theta$

$m^2+n^2-2mn+2mn = \frac{1}{8}\cot^2\theta\cos^2\theta$

$\left(m+n\right)^2+2mn = \frac{1}{8}\cot^2\theta\cos^2\theta$

$\left(\frac{\cos\theta}{2}\right)^2+2\left(\frac{\cos^4\theta}{16\sin^2\theta}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{\cot\theta}{\sin\theta}\right)^2\cos^2\theta$

$\frac{\cos^4\theta}{4}+\frac{\cos^4\theta}{8\sin^2\theta} = \frac{\cos^4\theta}{8\sin^2\theta}$

$\frac{\cos^4\theta}{4} = 0$ ✗

8. ให้ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$ เป็นข้อมูลที่เรียงค่าจากน้อยไปหามาก โดยมีค่ากึ่งกลางพิสัยเท่ากับ 15 และให้ $y_i=\frac{1}{2}\left(x_i+x_{i+1}\right)$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, 9$ ถ้า $y_1, y_2, \ldots, y_9$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ $\frac{55}{3}$ แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $x_1+1, x_2+2, x_3+3, \ldots, x_{10}+10$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 23.5 2. 28 3. 29 4. $\frac{88}{3}$ 5. $\frac{100}{3}$

<u>**ตอบ 1**</u>

ค่ากึ่งกลางพิสัยเท่ากับ 15 จะได้ $\frac{x_1+x_{10}}{2} = 15$

$x_1+x_{10} = 30$ .....(1)

จาก $y_1, y_2, \ldots y_9$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ $\frac{55}{3}$ จะได้ $\frac{y_1, y_2, y_3, \ldots y_9}{9} = \frac{55}{3}$

$y_i = \frac{1}{2}\left(x_i + x_{i+1}\right)$ $\qquad y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_9 = 165$

$$\frac{1}{2}\left(x_1 + x_2\right) + \frac{1}{2}\left(x_2 + x_3\right) + \frac{1}{2}\left(x_3 + x_4\right) + \dots + \frac{1}{2}\left(x_9 + x_{10}\right) = 165$$

$$x_1 + x_2 + x_2 + x_3 + x_3 + x_4 + \dots + x_9 + x_{10} = 330$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \dots + 2x_9 + x_{10} = 330 \quad \dots(2)$$

$$(1) - (2): 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \dots + 2x_9 + 2x_{10} = 360$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \dots + x_9 + x_{10} = 180 \quad \dots(*)$$

ค่าเฉลี่ยของ

$$x_1 + 1,\ x_2 + 2,\ x_3 + 3,\ \dots,\ x_{10} + 10 = \frac{\left(x_1 + 1\right) + \left(x_2 + 2\right) + \left(x_3 + 3\right) + \dots + \left(x_{10} + 10\right)}{10}$$

$$= \frac{\left(x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_{10}\right) + \left(1 + 2 + 3 + \dots + 10\right)}{10}$$

จาก$(*)$ และ$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$= \frac{180 + \frac{10(10+1)}{2}}{10} = 23.5$$

9. ให้ L เป็นจำนวนจริงบวก และ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิตของจำนวนจริง

โดยที่ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$ และ $\sum_{n=1}^{3} a_n = \frac{L}{3}$ ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. $a_4 = \frac{2}{3}a_1$
2. $a_{14} = \frac{16}{81}a_2$
3. $3(a_7 + a_8 + a_9) = 2(a_4 + a_5 + a_6)$
4. $\sum_{n=7}^{12} a_n = \frac{16}{81}L$
5. $\sum_{n=10}^{\infty} a_n = \frac{8}{27}L$

ตอบ 4

จาก $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$

$$\frac{a_1}{1-r} = L \quad \dots(1)$$

และจาก $\sum_{n=1}^{3} a_n = \frac{L}{3}$

$$\frac{a_1(1-r^3)}{1-r} = \frac{L}{3}$$

$$L(1-r^3) = \frac{L}{3}$$

$$1-r^3 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} = r^3 \quad \dots(2)$$

ลำดับ / อนุกรมเรขา

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

1. $a_4 = \frac{2}{3}a_1$

$$a_1 r^3 = \frac{2}{3}a_1$$

$$r^3 = \frac{2}{3} \quad ✓$$

(L เป็นบวก จะได้ $a_1 \neq 0$)

2. $a_{14} = \frac{16}{81}a_2$

$$a_1 r^{13} = \frac{16}{81}a_1 r^1$$

$$r^{12} = \frac{16}{81}$$

$$(r^3)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \quad ✓$$

3. $$3(a_7+a_8+a_9) = 2(a_4+a_5+a_6)$$
$$3(a_1r^6+a_1r^7+a_1r^8) = 2(a_1r^3+a_1r^4+a_1r^5)$$
$$3a_1r^6(1+r+r^2) = 2a_1r^3(1+r+r^2)$$
$$3r^3 = 2$$
$$r^3 = \frac{2}{3}$$ ✓

4. $$\sum_{n=7}^{12} a_n = \frac{16}{81}L$$
$$\sum_{n=1}^{12} a_n - \sum_{n=1}^{6} a_n = \frac{16}{81}L$$
$$\frac{a_1(1-r^{12})}{1-r} - \frac{a_1(1-r^6)}{1-r} = \frac{16}{81}L$$
$$L(1-r^{12}) - L(1-r^6) = \frac{16}{81}L$$
$$(1-r^{12}) - (1-r^6) = \frac{16}{81}$$
$$1-(r^3)^4 - 1 + (r^3)^2 = \frac{16}{81}$$
$$-\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{81}$$
$$-\frac{16}{81} + \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$$ ✓

5. $\sum_{n=10}^{\infty} a_n = \frac{8}{27}L$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{9} a_n = \frac{8}{27}L$

$L - \frac{a_1\left(1-r^9\right)}{1-r} = \frac{8}{27}L$

$L - L\left(1-r^9\right) = \frac{8}{27}L$

$1 - \left(1-r^9\right) = \frac{8}{27}$

$1 - 1 + \left(r^3\right)^3 = \frac{8}{27}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ ✓

10. ให้ C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + y^2 - 2ky = 0$ เมื่อ $k > 0$ ให้ T เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(-5, 4)$ และสัมผัสวงกลมที่จุด B โดยระยะทางระหว่างจุด A และจุด B เท่ากับ 1 หน่วย ถ้า H เป็นไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด C แกนสังยุคยาว 2k หน่วย และขนานกับแกน x และเส้นกำกับเส้นหนึ่งผ่านจุด A และจุด C แล้วสมการของไฮเพอร์โบลา H ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2 - 25y^2 + 250y - 600 = 0$
2. $x^2 - 25y^2 + 250y - 624 = 0$
3. $x^2 - 25y^2 + 250y - 650 = 0$
4. $25x^2 - y^2 + 10y + 50 = 0$
5. $25x^2 - y^2 + 10y - 50 = 0$

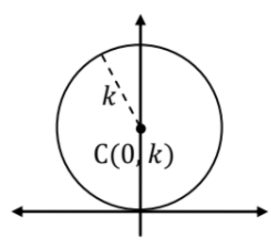
ตอบ 1

จัดรูปสมการวงกลม

$$x^2 + y^2 - 2ky = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2ky + k^2 = k^2$$

$$x^2 + \left(y-k\right)^2 = k^2$$

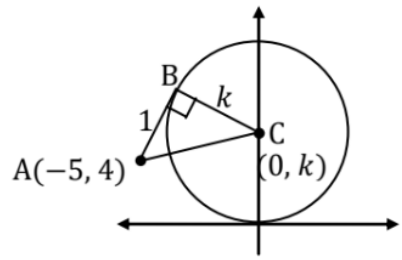


จะได้จุด ศก. คือ $C(0, k)$ และ รัศมี = k ⟶ วาดได้ดังรูป

ใส่จุด $A(-5,\ 4)$ และจุดสัมผัส B ตามโจทย์

จากสมบัติวงกลม จะได้ เส้นสัมผัส $\perp$ รัศมี $\longrightarrow$ $\triangle$ABC เป็น $\triangle$ มุมฉาก ดังรูป

พีทากอรัส จะได้ $AB^2 + BC^2 = AC^2$



$$1^2 + k^2 = \sqrt{(0-5)^2 + (k-4)^2}^{\,2}$$

$$1 + k^2 = 25 + k^2 - 8k + 16$$

$$8k = 40$$

$$k = 5$$

แทนค่า k จะได้H มี ศ.ก. อยู่ที่ $C(0,\ 5)$ แกนสังยุคยาว $2(5) = 10$ หน่วย และแกนสังยุคขนานแกน x

$\longrightarrow$ แนวตั้ง จะได้สมการของ H อยู่ในรูป $\dfrac{(y-5)^2}{a^2} - \dfrac{(x-0)^2}{b^2} = 1$ และสมการเส้นกำกับคือ

$\dfrac{y-5}{a} = \pm\dfrac{x-0}{b}$

แกนสังยุคยาว 10 หน่วย $\longrightarrow$ จะได้ $2b = 10$ ดังนั้น $b = 5$ เส้นกำกับผ่านจุด $A(-5,\ 4) \longrightarrow$ แทน

$x = -5$, $y = 4$ และ $b = 5$ ในสมการเส้นกำกับ จะได้ $\dfrac{4-5}{a} = \pm\dfrac{-5-0}{5}$

$$\pm 1 = a$$

แต่ a ต้องเป็นบวก ดังนั้น a = 1 $\longrightarrow$ จะได้สมการ H คือ $\dfrac{(y-5)^2}{1^2} - \dfrac{(x-0)^2}{5^2} = 1$

$$\frac{y^2 - 10y + 25}{1} - \frac{x^2}{25} = 1$$

$$25y^2 - 250y + 625 - x^2 = 25$$

$$-x^2 + 25y^2 - 250y + 600 = 0$$

$$x^2 - 25y^2 - 250y + 600 = 0$$

11. ให้ $x>0$ และให้ S แทนอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\log x\right)^n$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า $x<10$ แล้วอนุกรม S เป็นอนุกรมลู่เข้า

(ข) ถ้า $x=100$ แล้วอนุกรม S เป็นอนุกรมลู่ออก

(ค) ถ้า $x=\frac{1}{10}$ แล้วผลบวก 100 พจน์แรกของอนุกรม S เท่ากับ -100

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

<u>ตอบ 3</u>

ข้อนี้ต้องระวังว่า $(\log x)^n$ ไม่เหมือนกับ $\log x^n$

$\log x^n$ คือ เอา x มายกกำลัง n ก่อน แล้วค่อยหา log ซึ่งจะใช้สูตร $\log x^n = n\log x$ ได้

$(\log x)^n$ คือ หา $\log x$ มาก่อน แล้วค่อยยกกำลัง n ซึ่ง $(\log x)^n \neq n\log x$

กระจาย $\sum$ จะได้

$$S = (-1)^2\left(\log x\right)^1+(-1)^3\left(\log x\right)^2+(-1)^4\left(\log x\right)^3+(-1)^5\left(\log x\right)^4+\dots$$

$$= \left(\log x\right)^1-\left(\log x\right)^2+\left(\log x\right)^3-\left(\log x\right)^4+\dots$$

เป็นอนุกรมอนันต์ มี $a_1 = \log x$ และ $r = -\log x \longrightarrow$ จะลู่เข้าเมื่อ $|-\log x| < 1$

ก. ถ้า $x<10$ จะได้ $\log x<\log 10$ แต่ก็สรุปไม่ได้ว่า $|-\log x|<1$ (เช่นเมื่อ $\log x$ ติดลบมากๆ)

$\log x<1$

เช่น ถ้า $x = \frac{1}{100}$ จะได้ $|-\log x|=\left|-\log 10^{-2}\right|=|-(-2)| =2>1\longrightarrow$ ลู่ออก ก. ผิด

ข. ถ้า $x=100$ จะได้ $|-\log x| = |-2| =2>1 \longrightarrow$ ลู่ออก ข.ถูก

ค. (จริง ๆ ไม่ต้องทำ ค. แล้วก็ได้ เพราะ ก. ผิด ข. ถูก จะตอบ 3 ได้เลย)

ถ้า $x=\frac{1}{10}$ จะได้ $r =-\log\frac{1}{10}= 1\longrightarrow$ แสดงว่าทุกพจน์เท่ากันหมด (เพราะคูณเพิ่มทีละ 1)

ดังนั้น จะได้ผลบวก 100พจน์ $=100a_1 =100\left(\log\frac{1}{10}\right) =-100\longrightarrow$ ค. ถูก

12. กล่องใบหนึ่งมีบัตร 7 ใบ แต่ละใบเขียนจำนวน $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$ กำกับบนบัตรใบละ 1 จำนวน สุ่มหยิบบัตร 2 ใบ พร้อมกันจากกล่องใบนี้ ความน่าจะเป็นที่จะได้บัตร 2 ใบ มีผลรวมของจำนวนบนบัตรทั้งสองเป็นจำนวนคู่หรือเป็นจำนวนเต็มบวก เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{7}$　　2. $\frac{3}{7}$　　3. $\frac{4}{7}$　　4. $\frac{5}{7}$　　5. $\frac{6}{7}$

__ตอบ 4__

สุ่มหยิบ 2 ใบ จาก 7 ใบ $\longrightarrow$ จำนวนแบบทั้งหมด $n(S) = (72) = \frac{7\times 6}{2} = 21$ แบบ

จำนวนแบบที่สนใจ จะเห็นว่า นับแบบตรงข้าม จะง่ายกว่า
ตรงข้ามกับ “ผลรวมเป็นคู่ หรือ เป็นบวก” คือ “ผลรวมเป็นคี่ และ ≤ 0 ”
ซึ่งจะมี 6 แบบ ดังตาราง

-3 — $-2 \to -5$
-3 — $0 \to -3$
-3 — $2 \to -1$
-2 — $-1 \to -3$
-2 — $1 \to -1$
-1 — $0 \to -1$

ดังนั้น n(เป็นคู่ หรือ เป็นบวก) = ทั้งหมด $-$n(เป็นคี่ และ ≤ 0)
$= 21 - 6 = 15$ แบบ

จะได้ความน่าจะเป็น $= \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$

13. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยมี A, B และ C เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ให้ $\bar{a} = \overrightarrow{AB}$, $\bar{b} = \overrightarrow{BC}$ และ $\bar{c} = \overrightarrow{CA}$ ถ้า $\bar{a}\cdot\bar{b} = -15$, $\bar{b}\cdot\bar{c} = -21$ และ $\bar{c}\cdot\bar{a} = -10$ แล้ว พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $7\sqrt{2}$ ตารางหน่วย　　2. $8\sqrt{2}$ ตารางหน่วย　　3. $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ ตารางหน่วย

4. $5\sqrt{3}$ ตารางหน่วย　　5. $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ ตารางหน่วย

ตอบ 5

$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}$ วนกลับมาที่ A ดังนั้น $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}=0$

$$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$$

เอา $\bar{a}$ ดอทตลอด

$$\bar{a}\cdot\bar{a}+\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{0}$$
$$\bar{a}\cdot\bar{a}+\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{c}\cdot\bar{a}=\bar{a}\cdot\bar{0}$$
$$|\bar{a}|^2+(-15)+(-10)=0$$
$$|\bar{a}|^2=25$$
$$|\bar{a}|=5$$

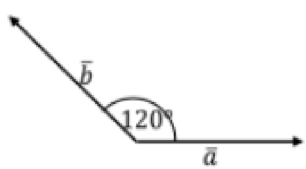
เอา $\bar{b}$ ดอทตลอด

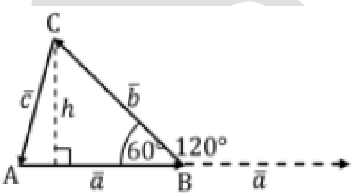
$$\bar{b}\cdot\bar{a}+\bar{b}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}=\bar{b}\cdot\bar{0}$$
$$\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{a}=\bar{b}\cdot\bar{0}$$
$$(-15)+|\bar{b}|^2+(-21)=0$$
$$|\bar{b}|^2=36$$
$$|\bar{b}|=6$$

เอา $|\bar{a}|$ และ $|\bar{b}|$ ที่ได้ ไปแทนในสูตร

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta$$
$$-15=(5)(6)\cos\theta$$
$$-\frac{1}{2}=\cos\theta$$
$$120^\circ=\theta$$

แต่ 120° จะเป็นมุมแบบหัวชนหัว ในขณะที่ $\triangle ABC$ เป็นแบบหัวชนหาง $\longrightarrow$ จะได้มุมใน $\triangle$ คือ 60° ดังรูป





$$\sin 60^\circ=\frac{h}{|\bar{b}|}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{h}{6}$$
$$3\sqrt{3}=h$$

จะได้พื้นที่ $\Delta ABC=\frac{1}{2}\times|\bar{a}|\times h=\frac{1}{2}\times5\times3\sqrt{3}=\frac{15\sqrt{3}}{2}$ ตร.หน่วย

14. กำให้ข้อมูลชุดที่ 1 คือ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ และข้อมูลชุดที่ 2 คือ $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{10}$ โดยที่ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ เป็นจำนวนจริงบวก และ $y_i = 2x_i + 1$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 10$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของข้อมูลชุดที่ 2 มีค่ามากกว่าส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของข้อมูลชุดที่ 1

(ข) สัมประสิทธิ์ของการแปรผันของข้อมูลชุดที่ 2 มีค่าน้อยกว่าสัมประสิทธิ์ของการผันของข้อมูลชุดที่1

(ค) ถ้าแต่ละ x_i มีค่าเพิ่มขึ้น 1 หน่วย แล้วส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดที่ 2 มีค่าเพิ่มขึ้น

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

<u>ตอบ 5</u>

ก. การคูณ 2 จะทำให้ ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย (MD) เพิ่มเป็น 2 เท่าของของเดิม แต่การบวก 1 จะ<u>ไม่</u>ทำให้ MD เปลี่ยนดังนั้น ข้อมูล $y_i = 2x_i + 1$ จะมี MD เป็น 2 เท่าของ ข้อมูล x_i (แต่ไม่บวก 1)

แต่ "เป็น 2 เท่า" ไม่ได้แปลว่า "มากกว่า" เสมอไป เช่น 2 เท่าของ 0 ยังคงเท่ากับ 0

ซึ่งในกรณีที่ x_i ทุกตัวมีค่าเท่ากัน จะได้ MD = 0 ทำให้ข้อมูล y_i มี MD = 0 เท่ากับ MD ของข้อมูล x_i

$\longrightarrow$ ก. ผิด (ถ้าข้อนี้โจทย์กำหนดให้ x_i ไม่ได้เป็นค่าเดียวกันหมดทั้ง 10 ตัว ข้อนี้จะถูก)

ข. สปส การแปรผัน $= \dfrac{s}{x}$

s จะคล้ายๆ MD คือ การบวกไม่ท ำให้ s เปลี่ยน $\longrightarrow s_y = 2s_x$

แต่การคูณ 2 บวก 1 จะท ำให้ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต เปลี่ยนไปแบบ คูณ 2 บวก 1 ด้วย $\longrightarrow \overline{y} = 2\overline{x} + 1$

เนื่องจาก x_i เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ $\overline{x}$ และ $\overline{y}$ เป็นบวกด้วย

ดังนั้น $\dfrac{s_y}{y} = \dfrac{2s_x}{2\overline{x}+1} \le \dfrac{2s_x}{2\overline{x}} = \dfrac{2_x}{\overline{x}}$

ตัวส่วนน้อยลง ค่าจะมากขึ้น แต่ยังเท่ากันได้ ถ้าเศษ = 0

$\longrightarrow$ จะเห็นว่า สปส การแปรผันของข้อมูลทั้งสอง ยังเท่ากันได้อยู่ ในกรณีที่ $s_x = 0$ (เมื่อ x_i ทุกตัวมีค่าเท่ากัน) $\longrightarrow$ ข. ผิด

(ถ้าข้อนี้โจทย์กำหนดให้ x_i ไม่ได้เป็นค่าเดียวกันหมดทั้ง 10 ตัว ข้อนี้จะถูก)

ค. การบวกลบด้วยค่าคงที่ จะไม่ท ำให้ s เปลี่ยน $\longrightarrow$ ค.ผิด

15. กำหนดให้ A และ B เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\det(AB - BA) = 0$

(ข) ถ้า $\det(A) \neq 0$ และ $\det(B) = 0$ แล้ว $\det(A+B) \neq 0$

(ค) ถ้า $\det(A) \neq 0$, $\det(B) \neq 0$ และเมทริกซ์ $A+B$ มีอินเวอร์สการคูณ

แล้ว $(A+B)^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) ถูกเพียงข้อเดียว
2. ข้อ (ข) ถูกเพียงข้อเดียว
3. ข้อ (ค) ถูกเพียงข้อเดียว
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

ตอบ 5

det ไม่สามารถกระจายในการบวกลบได้ ดังนั้น ก. ข. ค.มีแนวโน้มที่จะผิดสูง $\longrightarrow$จะเน้นหาเมทริกซ์มาจับผิดดู

ก. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ จะได้ $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ข. ให้ $A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det A = \det I = 1 \neq 0$

ให้ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det B = (-1)(0) - (0)(0) = 0$

จะได้ $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ det ได้ $(0)(1) - (0)(0) = 0 \longrightarrow$ ข.ผิด

ค. ให้ $A = B = I$ แทนใน ค. จะได้ $(A+B)^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$

$(I+I)^{-1} = I^{-1} + I^{-1}$

$(2I)^{-1} = I + I$

$\frac{1}{2}I^{-1} = 2I$

$\frac{1}{2}I = 2I \longrightarrow$ ค. ผิด

16. ให้ P เป็นพาราโบลารูปหนึ่ง มีโฟกัสอยู่บนเส้นตรง $x + 2y = 4$ และสมการของแกนสมมาตรคือ $y = 3$ ถ้า P มีเส้นไดเรกตริกซ์เป็นเส้นตรงเดียวกันกับเส้นไดเรกตริกซ์ของพาราโบลา

$y^2 + 8y - 24x + 16 = 0$ แล้วพาราโบลา P ผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-7,1)$ 2. $(-4,0)$ 3. $(1, -1)$ 4. $(2, -4)$ 5. $(4, -5)$

ตอบ 5

จุด F อยู่บนเส้นตรง $x + 2y = 4 \longrightarrow$ จุด F ต้องแทนใน $x + 2y = 4$ แล้วเป็นจริง

แต่ F จะอยู่บนแกนสมมาตร $y = 3$ ด้วย ดังนั้น F จะมีค่า y เท่ากับ 3 $\longrightarrow$ แทนในเส้นตรงจะได้

$$x + 2(3) = 4$$
$$x = -2$$

ถัดมา หาไดเรกตริกซ์ $\longrightarrow$ จัดรูปพาราโบลา $y^2 + 8y - 24x + 16 = 0$

$$y^2 + 8y + 16 = 24x$$
$$(y + 4)^2 = 4(6)x$$

ตรงกับรูป $(y - k)^2 = 4c(x - h) \longrightarrow$ เป็นพาราโบลาเปิดขวา $(h, k) = (0, -4)$ และ $c = 6$

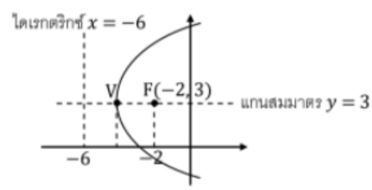
จะได้เส้นไดเรกตริกซ์คือ $x = h - c$

$= 0 - 6 = -6 \longrightarrow$ เส้นไดเรกตริกซ์ของ P คือ $x = -6$

จาก $F(-2, 3)$ และ ไดเรกตริกซ์ $x = -6$ จะวาด P ได้ดังรูป

จุดยอด V จะอยู่ตรงกลางระหว่าง F และ ไดเรกตริกซ์

$\longrightarrow \dfrac{(-6) + (2)}{2} = -4$ ดังนั้น พิกัด $V(h, k)$ คือ $(-4, 3)$



และ c = ระยะระหว่าง V กับ $F = (-2) - (-4) = 2$

P เป็นพาราโบลาเปิดขวา $\longrightarrow$

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$
$$(y - 3)^2 = 4(2)(x - (-4))$$
$$(y - 3)^2 = 8(x + 4)$$

ลองแทนจุดในแต่ละตัวเลือก แล้วดูว่าข้อไหนทำให้สมการ $(y - 3)^2 = 8(x + 4)$ เป็นจริง

1. $(1 - 3)^2 = 8(-7 + 4)$
   $4 = -24$ ✗
2. $(0 - 3)^2 = 8(-4 + 4)$
   $9 = 0$ ✗
3. $(-1 - 3)^2 = 8(1 + 4)$
   $16 = 40$ ✗
4. $(-4 - 3)^2 = 8(2 + 4)$
   $49 = 48$ ✗
5. $(-5 - 3)^2 = 8(4 + 4)$
   $64 = 64$ ✓

17. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง ถ้ากราฟของ $f(x)=ax^2+bx+c$ ผ่านจุด $(0,1)$, $(1,3)$ และจุด $(2,2)$ แล้วพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=f(x)$ และเส้นตรง $y=x$ จาก $x=0$ ถึง $x=2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{5}{2}$ ตารางหน่วย
2. $\frac{8}{3}$ ตารางหน่วย
3. 3 ตารางหน่วย
4. $\frac{7}{2}$ ตารางหน่วย
5. 5 ตารางหน่วย

__ตอบ 3__

กราฟผ่าน $(0,1)$, $(1,3)$, $(2,2) \longrightarrow$ แสดงว่าแทนทั้ง 3 จุดในกราฟ $f(x)=ax^2+bx+c$ แล้วสมการเป็นจริง

$(0,1)$: $1=a(0^2)+b(0^2)+c$

$1=c$

$(1,3)$: $3=a(1^2)+b(1)+c$

$3=a+b+1$

$2=a+b$ ...(1)

$(2,2)$: $2=a(2^2)+b(2)+c$

$2=4a+2b+1$

$1=4a+2b$ ....(2)

$(1)\times 2$: $4=2a+2b$

$(2)-(3)$: $-3=2a$

$-\frac{3}{2}=a$

แทนค่าใน (1)

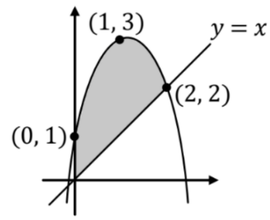
$2=-\frac{3}{2}+b$

$\frac{7}{2}=b$

จะได้ $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{2}x+1$

a เป็นลบ จะได้f เป็นพาราโบลาคว่ำ $\longrightarrow$ วาดส่วนที่ปิดล้อมกับเส้นตรง $y=x$ ได้ดังรูป

จะเห็นว่า $x=0$ ถึง $x=2$ กราฟพาราโบลาอยู่เหนือเส้นตรงตลอดทั้งช่วง



ดังนั้นจะไม่ต้องแบ่งอินทิเกรต จะได้พื้นที่ $=\int_0^2 \left(-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{2}x+1\right)-(x)\,dx$

$$=\int_0^2 -\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x+1\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{4}x^2+x\,\Big|_0^2 \quad =(-4+5+2)-(0)=3$$

18. ถ้า A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $x^2 + 2|x-3| - 9 > 0$

และ B เป็นเซตคำตอบของอสมการ $|x-3| < 2$

แล้ว $A \cap B$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $(4, \infty)$ 2. $(-\infty, 1)$ 3. $(-1, 3)$ 4. $(3, 6)$ 5. $(0, 4)$

<u>ตอบ 4</u>

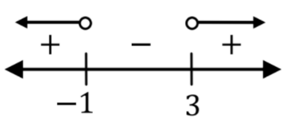
หา A จะแบ่งกรณีให้รู้เครื่องหมายของ $x-3$ เพื่อกำจัดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ด้วยสมบัติ

$$|a| = \begin{cases} a & , a \geq 0 \\ -a & , a < 0 \end{cases}$$

<u>กรณี</u> $x - 3 < 0$: จะได้ $|x-3| = -(x-3)$

$x < 3$

$$\begin{aligned} x^2 + 2|x-3| - 9 &> 0 \\ x^2 + 2(-(x-3)) - 9 &> 0 \\ x^2 - 2x + 6 - 9 &> 0 \\ x^2 - 2x - 3 &> 0 \\ (x+1)(x-3) &> 0 \end{aligned}$$



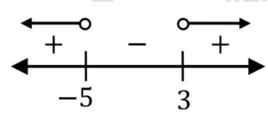
ตัดคำตอบให้อยู่ภายใต้เงื่อนไขของกรณี $(x < 3)$

จะเหลือคำตอบคือ $(-\infty, -1)$

<u>กรณี</u> $x - 3 < 0$:จะได้ $|x-3| = -(x-3)$

$x \geq 3$

$$\begin{aligned} x^2 + 2|x-3| - 9 &> 0 \\ x^2 + 2(x-3) - 9 &> 0 \\ x^2 - 2x - 6 - 9 &> 0 \\ x^2 + 2x - 15 &> 0 \\ (x+5)(x-3) &> 0 \end{aligned}$$



ตัดคำตอบให้อยู่ภายใต้เงื่อนไขของกรณี $(x \geq 3)$

จะเหลือคำตอบคือ $(3, \infty)$

รวมสองกรณี จะได้ $A = (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$

หา B : จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์ $|x-3| < 2$ ก็ต่อเมื่อ $-2 < x - 3 < 2$

+3 ตลอด

$1 < x < 5$

จะได้ $B = (1, 5)$

ดังนั้น $A \cap B = [(-\infty, -1) \cup (3, \infty)] \cap (1,5) = (3,5)$ ซึ่งจะเป็นสับเซตของ $(3,6)$ ในข้อ 4

19. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ คือ $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

ให้ $P(x)$ แทน $|x| \geq x$ และ $Q(x)$ แทน $|x| < |x+1| + 1$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ประพจน์ $\exists x[\sim Q(x)] \rightarrow \exists x[\sim P(x)]$ มีค่าความจริงเป็น จริง

(ข) ประพจน์ $\forall x[P(x)] \rightarrow \forall x[\sim Q(x)]$ มีค่าความจริงเป็น เท็จ

(ค) ประพจน์ $\exists x[P(x)] \rightarrow \exists x[Q(x)]$ มีค่าความจริงเป็น จริง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

<u>ตอบ 3</u>

พิจารณา $P(x)$: เนื่องจาก $|x|$ คือค่าที่เป็นบวกของ x ดังนั้น การใส่ค่าสัมบูรณ์จะทำให้ได้ค่ามากขึ้น (เมื่อ x เป็นลบ) หรือเท่าเดิม (เมื่อ x เป็นบวกหรือศูนย์) ดังนั้น $|x| \geq x$ เสมอ ดังนั้น x ทุกค่า จะทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

พิจารณา $Q(x)$: จะไล่แทนค่าทีละตัวก็ได้ ซึ่งจะเห็นว่าเมื่อ x เป็นบวกหรือศูนย์อสมการ $|x| < |x+1| + 1$ จะเป็นจริง (เพราะเมื่อทุกตัวเป็นบวกหรือศูนย์ ค่าสัมบูรณ์จะได้เท่าเดิม ได้เป็น $x < x+1+1$ ซึ่งเป็นจริง)สำหรับ x ที่เป็นลบ ลองแทน $x=-3$ ดู จะได้ |-3| < |-3 + 1| + 1

3 < | -2 | + 1

3 < 2 + 1 x

ดังนั้น จะมีบางค่าที่ทำให้ $Q(x)$ เป็นจริง และมีบางค่าที่ทำให้ $Q(x)$ เป็นเท็จ

(ก) $\exists x[\sim Q(x)]$ จะเป็นจริง (เพราะมี x บางตัวทำให้ $Q(x)$ เป็นเท็จ)

$\exists x[\sim P(x)]$ จะเป็นเท็จ (เพราะไม่มี x ตัวไหนทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จ)

ดังนั้น $\exists x[\sim Q(x)] \rightarrow \exists x[\sim P(x)] \equiv T \rightarrow F \equiv F$ ก. ผิด

(ข) $\forall x[P(x)]$ จะเป็นจริง (เพราะ x ทุกตัว ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง)

$\forall x[\sim Q(x)]$ จะเป็นเท็จ (เพราะ $Q(x)$ จริงบางตัว เท็จบางตัว)

ดังนั้น $\forall x[P(x)] \rightarrow \forall x[\sim Q(x)] \equiv T \rightarrow F \equiv F$ ข. ถูก

(ค) $\exists x[P(x)]$ จะเป็นจริง (เพราะมี x บางตัว (จะใช้ตัวไหนก็ได้) ที่ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง)

$\exists x[Q(x)]$ จะเป็นจริง (เพราะมี x บางตัวทำให้ $Q(x)$ เป็นจริง)

ดังนั้น $\exists x[P(x)] \rightarrow \exists x[Q(x)] \equiv T \rightarrow T \equiv T$ ค. ถูก

20. ถ้าคะแนนสอบวิชาหนึ่งของนักเรียนจำนวน 80 คน มีการแจกแจงปกติและสัมประสิทธิ์ของส่วยเบี่ยงเบนควอไทล์เท่ากับ $\frac{1}{3}$ มีนักเรียนคนหนึ่งในห้องนี้สอบได้ 39 คะแนน คิดเป็นค่ามาตรฐานเท่ากับ 1.5 และมีนักเรียนจำนวน 60 คนที่มีคะแนนสอบมากกว่า 15 คะแนน แล้วส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 9.5 คะแนน
2. 10 คะแนน
3. 10.5 คะแนน
4. 11 คะแนน
5. 11.5 คะแนน

ตอบ 4

60 คน จาก 80 คน คิดเป็น $\frac{60}{80}=\frac{3}{4} \rightarrow$ ดังนั้น มี 3 ใน 4 ของนักเรียนทั้งหมดได้มากกว่า 15 คะแนน แสดงว่ามี 1 ใน 4 ของนักเรียนทั้งหมดได้น้อยกว่าหรือเท่ากับ 15 คะแนน ดังนั้น $Q1=15$ โจทย์ให้สปส.

ควอไทล์ $=\frac{1}{3}$ ดังนั้น

$$\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{Q_3-15}{Q_3+15} = \frac{1}{3}$$

$$3Q_3-45 = Q_3+15$$

$$2Q_3 = 60$$

$$Q_3 = 30$$

ข้อมูลที่แจกแจงปกติ จะมีความสมมาตร ดังนั้น ค่ากลางทุกตัว ($\overline{x}$, Med, Mode) จะอยู่ตรงกลางระหว่าง Q_1 กับ Q_3 จะได้ $\overline{x}=\frac{Q_1+Q_3}{2}=\frac{15+30}{2}=22.5$

และโจทย์กำหนดให้ 39 คะแนน เท่ากับค่ามาตรฐาน 1.5 แสดงว่า

$$\frac{39-\overline{x}}{S}=1.5$$

$$\frac{39-22.5}{S}=1.5$$

$$16.5 = 1.5S$$

$$11 = S$$

21. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ให้ r = $\left\{(x, y)\ ?\ R\ ?\ R \mid y = \sqrt{32x - 16x^2}\right\}$

ถ้า A และ B เป็นโดเมนและเรนจ์ของ r ตามล าดับ แล้ว $B - A$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-1\ ,\ 2)$ 2. $(0\ ,\ 3)$ 3. $(1\ ,\ 4)$ 4. $(2\ ,\ 6)$ 5. $(3\ ,\ \infty)$

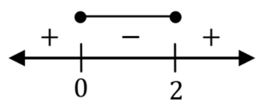
<u>ตอบ 4</u>

หาโดเมน $\longrightarrow$ ในรูทต้อง ≥ 0 $\longrightarrow$ $32x - 16x^2 \geq 0$

$$2x - x^2 \geq 0$$

$$0 \geq x^2 - 2x$$

$$0 \geq x(x - 2)$$



$\rightarrow A = [0, 2]$

หาเรนจ์ $\longrightarrow$ จะลดพจน์ที่มี x ให้เหลือพจน์เดียวก่อน โดยเติม ล^{2}ให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ดังนี้

$$y = \sqrt{32x - 16x^2}$$

$$y = \sqrt{-16\left(x^2 - 2x\right)}$$

$$y = \sqrt{-16\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right)}$$

$$y = \sqrt{-16\left((x-1)^{2-1}\right)}$$

$$y = \sqrt{-16(x-1)^2 + 16}$$

เติม $+1-1$ ให้เข้าสูตร น^2 $-$ 2นล $+$ ล^2 ได้เป็น (น $-$ ล)^2

จากนั้น ใช้สมบัติ "กำลังสอง ≥ 0" พิจารณาช่วงค่าที่เป็นไปได้ย้อนกลับขึ้นมาจนกลายเป็นค่า y

$$(x-1)^2 \geq 0$$

คูณเลขลบทั้งสองฝั่ง ต้องกลับน้อยกว่าเป็นมากกว่า

$$-16(x-1)^2 \leq 0$$

$$-16(x-1)^2+16 \leq 16$$

ถอดทรูททั้งสองฝั่ง

ผลทรูทจะ ≥ 0 เสมอ

$$0 \leq \sqrt{-16(x-1)^2+16} \leq 4$$

$$0 \leq y \leq 4$$

$\longrightarrow B = [0 , 4]$

จะได้ $B - A = [0,4]-[0,2] = (2,4]$ ซึ่งจะเป็นสับเซตของ (2 , 6) ในข้อ 4

22. ถ้า A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $(x^2-2x-16)\log_2\left(2-\sqrt{3}\right) < \log_2\left(2+\sqrt{3}\right)$
แล้ว A เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\infty, -3) \cup (4, \infty)$
2. $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$
3. $(-4,3)$
4. $(-3,6)$
5. $(-1,9)$

<u>**ตอบ 1**</u>

สังเกตว่า $2+\sqrt{3}$ กับ $2-\sqrt{3}$ เป็นคู่คอนจูเกตกัน ซึ่ง $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 22-\sqrt{32} = 1$

ดังนั้น $2-\sqrt{3} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

แทนในอสมการ $(x^2 - 2x - 16) \log_2(2 - \sqrt{3}) < \log_2(2 + \sqrt{3})$

$$(x^2 - 2x - 16) \log_2\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^{-1} < \log_2(2 + \sqrt{3})$$

$$(x^2 - 2x - 16) \log_2(2 + \sqrt{3})^{-1} < \log_2(2 + \sqrt{3})$$

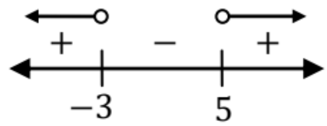
$$(x^2 - 2x - 16)(- \log_2(2 + \sqrt{3})) < \log_2(2 + \sqrt{3})$$

$$(x^2 - 2x - 16)(- 1) < 1$$

$$-x^2 + 2x + 16 < 1$$

$$0 < x^2 - 2x - 15$$

$$0 < (x + 3)(x - 5)$$



จะได้ A $=(-\infty,-3)\cup(5,\infty)$ ซึ่งเป็นสับเซตของ $(-\infty,-3)\cup(4,\ \infty)$ ในข้อ 1

23. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $f:R\longrightarrow R$ และ $g:R\longrightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน มีนิยามโดย

$f(x) = |x - 1|+|x + 1|$ และ $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ a + b = 1 แล้ว $(g\circ f)(a) + (f\circ g)(b)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1.4   2. 1.8   3. 2.4   4. 2.8   5. 3.4

<u>ตอบ 3</u>

จะหาเครื่องหมายของพจน์ในค่าสัมบูรณ์ แล้วใช้สมบัติ $|x| = \begin{cases} x & ,x\geq 0 \\ x & ,x<0 \end{cases}$ เพื่อกำจัดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์

จาก a, b เป็นบวก และ $a+b=1$ จะได้ $0<a<1$ และ $0<b<1$

$$\begin{aligned}(g\circ f)(a) &= g(f(a)) \\ &= g(|a-1|+|a+1|) \\ &= g(-(a-1)+a+1) \\ &= g(-a+1+a+1) \\ &= g(2) \\ &= \frac{2}{2^2+1} = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

จาก $0<a<1$ จะได้ $a-1$ เป็นลบ และ $a+1$ เป็นบวก

$$\begin{aligned}(f\circ g)(b) &= f(g(b)) \\ &= f\left(\frac{b}{b^2+1}\right) \\ &= \left|\frac{b}{b^2+1}-1\right|+\left|\frac{b}{b^2+1}+1\right| \\ &= -\left(\frac{b}{b^2+1}-1\right)+\frac{b}{b^2+1}+1 \\ &= \frac{b}{b^2+1}+1+\frac{b}{b^2+1}+1 = 2\end{aligned}$$

จาก $0<b<1$ และ $b^2+1\geq 1$

จะได้ $0<\dfrac{b}{b^2+1}<1$

ดังนั้น $\dfrac{b}{b^2+1}-1$ เป็นลบ และ $\dfrac{b}{b^2+1}+1$ เป็นบวก

ดังนั้น $(g\circ f)(a)+(f\circ g)(b)=\dfrac{2}{5}+2=\ 2.4$

24. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ $3^{(8-2x)}4^{(x+y)} = 384\left(9^{y}\right)$ และ $5^{(3x-2y-3)} = 1$ แล้วค่าของ xy เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2   2. 3   3. 3.5   4. 5   5. 7.5

<u>ตอบ 2</u>

แยกตัวประกอบ 384 จะได้ $384 = 2^{7} \times 3$

จัดรูปสมการแรกให้เป็นฐาน 2 และ 3 :

$$3^{(8-2x)}4^{(x+y)} = 384(9^{y})$$

$$3^{(8-2x)}2^{2(x+y)} = (2^{7} \cdot 3)(3^{2y})$$

$$\frac{2^{x+2y}}{2^{7}} = \frac{3^{2y+1}}{3^{8-2y}}$$

3

$$2^{2x+2y-7} = 3^{2y+2x-7}$$

จะเห็นว่าทั้งสองข้างของสมการ มีเลขชี้กำลังเท่ากัน แต่ฐานไม่เท่ากัน

สมการจะเป็นจริงได้ เมื่อเลขชี้ก ำลัง = 0 เท่านั้น $\longrightarrow$ จะได้ $2x + 2y - 7 = 0$ ...(1)

และจากอีกสมการ $5^{(3x-2y-3)} = 1$ จะได้ $3x - 2y - 3 = 0$ ...(2)

$$(1)+(2)\ :\ 5x - 10 = 0$$

$$x = 2$$

$$\text{แทนใน (1)}\ :\ 2(2) + 2y - 7 = 0$$

$$y = \frac{3}{2}$$

จะได้ $xy = (2)\left(\frac{3}{2}\right) = 3$

25. กำหนดให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม และ R แทนเซตของจำนวนจริง

สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ นิยาม [x] หมายถึงจำนวนที่มีค่ามากที่สุดของเซต $\{n \in I \mid n \leq x\}$

ถ้า $f : R \longrightarrow R$ เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย $f(x) = 10\left[\frac{x+5}{10}\right] + \left[x + \frac{1}{2}\right] + 110[5 - 6x]$ เมื่อ $x \in R$

แล้วค่าของ $f(2.4)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3.2   2. 2.1   3. 2   4. 1.1   5. 1

<u>ตอบ 5</u>

จะได้ [x] คือจำนวนเต็มมากสุดที่ ≤ x $\longrightarrow$ คือการปัดเศษลงนั่นเอง

ดังนั้น $f(2.4)=10\left[2.4+\frac{5}{10}\right]+\left[2.4+\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{10}[5-6(2.4)]$

$$=10[0.74]+[2.9]+\frac{1}{10}[-9.4]$$

$$=10(0)+2+110(-10)$$

$$=1$$

เลขลบ เวลาปัดลง จะเป็นลบมากขึ้น
(ลบมาก = ค่าน้อย)

26. ให้ A เป็นเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับสมการ √ $\sqrt{6x-2}-\sqrt{2x+7}=1$
ผลบวกของกำลังสองของสมาชิกทั้งหมดในเซต A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 10.5 2. 14.25 3. 20.25 4. 21.25 5. 30.5

ตอบ 3

จะยกกำลังสอง เพื่อกำจัดรูทไปเรื่อย ๆ (การยกกำลังสอง อาจทำให้มีคำตอบปลอมหลุดออกมาได้ ⟶ ต้องต

$$\sqrt{6x-2}-\sqrt{2x+7}=1$$

$$\sqrt{6x-2}=\sqrt{2x+7}+1$$

$$6x-2=\left(\sqrt{2x+7}+1\right)^2$$

$$6x-2=2x+7+2\sqrt{2x+7}+1$$

$$4x-10=2\sqrt{2x+7}$$

$$x-5=\sqrt{2x+7}$$

$$(2x-5)^2=2x+7$$

$$4x^2-20x+25=2x+7$$

$$4x^2-22x+18=0$$

$$2x^2-11x+9=0$$

$$(2x-9)(x-1)=0$$

$$x=92,\ 1$$

ตรวจคำตอบ

$x=\frac{9}{2}$: $\sqrt{6\left(\frac{9}{2}\right)-2}-\sqrt{2\left(\frac{9}{2}\right)+7}=1$

$5-4=1$ ✓

$x=1$: $\sqrt{6(1)-2}-\sqrt{2(1)+7}=1$

$2-3=1$ ✗

จะได้คำตอบเดียวคือ $\frac{9}{2}\longrightarrow$ กำลังสองได้ $\frac{81}{4}=20.25$

27. ให้ R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 5 รูป มีข้อมูล ดังนี้

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
ความกว้าง (x)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
ความยาว (y)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

โดยที่ $0 < x_i \le 10$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของความกว้างของรูปสี่เหลี่ยม 5 รูป เท่ากับ 5หน่วย ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของความยาวของรูปสี่เหลี่ยม 5 รูป เท่ากับ 8 หน่วย ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม 5 รูป เท่ากับ 51.8 ตารางหน่วย และความแปรปรวนของความกว้างเท่ากับ 12

สมมติว่ากราฟแผนภาพการกระจายที่แสดงความสัมพันธ์ความกว้างและความยาว อยู่ในรูปแบบเส้นตรง ถ้าสร้างรูปสี่เหลี่ยมมีความกว้าง 2 หน่วย แล้วความยาว (โดยประมาณ) ของรูปสี่เหลี่ยมนี้ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5.05 หน่วย 2. 5.55 หน่วย 3. 5.75 หน่วย 4. 6.05 หน่วย 5. 6.55 หน่วย

ตอบ 1

กว้างเฉลี่ย = 5

$$\frac{\sum x_i}{5} = 5$$

$$\sum x_i = 25$$

ยาวเฉลี่ย = 8

$$\frac{\sum y_i}{5} = 8$$

$$\sum y_i = 40$$

พื้นที่เฉลี่ย = 51.8

$$\frac{\sum x_i y_i}{5} = 51.8$$

$$\sum x_i y_i = 259$$

ความแปรปรวนความกว้าง = 12

$$\frac{\sum x_i^2}{5} - \bar{x} = 12$$

$$\frac{\sum x_i}{5} - 5^2 = 12$$

$$\sum x_i^2 = 185$$

โจทย์ให้ทำนายความยาว (y) จากความกว้าง $(x) = 2$ ด้วยรูปแบบเส้นตรง $\longrightarrow$ ใช้สมการ $\hat{y} = a + bx$

เมื่อ a, b หาได้จากสูตร

$$\sum y_i = aN + b\sum x_i \qquad 40 = 5a + 25b \quad ...(1)$$

$$\sum x_i y_i = a\sum x_i + b\sum x_i^2 \qquad 259 = 25a + 185b \quad ...(2)$$

$$(1)\times 5: \quad 200 = 25a + 125b \quad ...(3)$$

$$(2)-(3): \quad 59 = 60b$$

$$\frac{59}{60} = b$$

แทนใน (1) : $40 = 5a + 25 \cdot \frac{59}{60}$

$$8 = a + \frac{59}{12}$$

$$\frac{37}{12} = a$$

จะได้สมการทำนายคือ $\hat{y} = \frac{37}{12} + \frac{59}{60}x \longrightarrow$ เมื่อ $x = 2$ จะได้ $\hat{y} = \frac{37}{12} + \frac{59}{60}(2)$

$$= \frac{185 + 118}{60} = \frac{303}{60} = 5.05$$

28. นิยาม $a * b = 1 + ab$ สำหรับ a และ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $a * (1 * a) = (a * 1) * a$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม a

(ข) $a * (b * c) = (a * b) * c$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม a, b และ c

(ค) $((1 * 2) * 3) * 4$ เป็นจำนวนเฉพาะ

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

<u>ตอบ 2</u>

(ก) จะเห็นว่า $\left.\begin{array}{l} a * b = 1 + ab \\ b * a = 1 + ba \end{array}\right\}$ เท่ากัน ดังนั้น * มีสมบัติการสลับที่

ดังนั้น $\underbrace{a * (1 * a)}_{\text{สลับที่}} = \underbrace{(1 * a) * a}_{\text{สลับที่}} = (a * 1) * a \longrightarrow$ (ก) ถูก

(ข)
$$\begin{aligned} a * (b * c) &= (a * b) * c \\ a * (1 + bc) &= (1 + ab) * c \\ 1 + a(1 + bc) &= 1 + (1 + ab)c \\ 1 + a + abc &= 1 + c + abc \end{aligned}$$

(ค) $((1*2)*3)*4 = ((1+(1)(2))*3)*4$

$= (3*3)*4$

$= (1+(3)(3))*4$

$= 10*4$

$= 1+(10)(4)$

$= 41$

เป็นจำนวนเฉพาะ $\longrightarrow$ (ค) ถูก

29. ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $x+y+z=15$ และสอดคล้องกับ $(z+1)^x = y^{2x}$ และ $(0.1)^z = (0.01)^x$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $x < y < z$ 2. $y < x < z$ 3. $x < z < y$ 4. $y < z < x$ 5. $z < y < x$

<u>ตอบ 2</u>

เนื่องจาก x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวก จึงไม่ต้องระวังเรื่องเลขติดลบ

จาก $(z+1)^x = y^{2x}$

$z+1 = y^2$ .....(1)

จาก $(0.1)^z = (0.01)^x$

$(0.1)^z = \left((0.1)^2\right)^x$

$(0.1)^z = (0.1)^{2x}$

$z = 2x$ ...(2)

ข้อนี้จะแก้ระบบสมการ 3 ตัวแปรตรง ๆก็ได้ แต่แทนค่าเอาจะง่ายกว่า (เพราะจากเงื่อนไขเรื่องจำนวนเต็มบวก จะเหลือตัวเลือกให้ลองแทนได้ไม่มาก)

จาก $x+y+z=15$ จะได้ $z \le 13$ และจาก(2)จะได้ z เป็นเลขคู่ ดังนั้นzเป็นได้แค่ 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 และ $z+1$ เป็นได้แค่ 3 , 5 , 7 , 9 , 11 , 13

แต่จาก (1) $z+1$ ต้องเป็นผลยกกำลังสอง $\longrightarrow$ มี 9 เท่านั้น ที่เป็นผลยกกำลังสองดังนั้น

$z+1 = 9 = 32$ จะได้ $y=3$ และ $z = 9-1 = 8$ และจาก (2) จะได้ $x = \frac{8}{2} = 4$

ซึ่งจะเห็นว่า $x+y+z = 4+3+8 = 15$ ตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดเนื่องจาก $3 < 4 < 8$ ดังนั้น $y < x < z$

30. กำหนดให้เส้นตรง L ผ่านจุด $A(2,0)$ และจุด $B(-4,8)$ ให้เส้นตรง M ผ่านจุด B และจุด $C(-a,0)$ เมื่อ $a>0$ ถ้าระยะระหว่างจุด C กับเส้นตรง L เท่ากับ $\frac{48}{5}$ หน่วย แล้วระยะห่างระหว่างจุดกำเนิด $(0,0)$ กับเส้นตรง M เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 7 หน่วย 2. 8 หน่วย 3. 10.5 หน่วย 4. 13.5 หน่วย 5. 15 หน่วย

<u>ตอบ 2</u>

เส้นตรง L ผ่าน A $A(2,0)$ และ $B(-4,8)$

ดังนั้น จะได้สมการของ L คือ
$$\frac{y-0}{x-2}=\frac{8-0}{-4-2}=-\frac{4}{3}$$
$$3y=-4x+8$$
$$4x+3y-8=0$$

เส้นตรงที่ผ่าน (a, b) และ (c, d) คือ $\frac{y-b}{x-a}=\frac{d-b}{c-a}$

จะได้ระยะระหว่าง $C(-a,0)$ กับ L คือ
$$=\frac{|4(-a)+3(0)-8|}{\sqrt{4^2+3^2}}$$
$$=\frac{|4a-8|}{5}$$

a เป็นบวก $\rightarrow -4a-8$ จะเป็นลบ

ค่าสัมบูรณ์จะเปลี่ยน . ให้เป็น $4a+8$
$$=\frac{4a+8}{5}$$

ระยะระหว่างจุด (a, b) กับเส้นตรง $Ax+By+C=0$ คือ $\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

ซึ่งโจทย์ให้ระยะนี้คือ $\frac{48}{5}$ ดังนั้น $\frac{4a+8}{5}=\frac{48}{5}$ แก้สมการจะได้ $a=10$

แทนค่า a จะได้เส้นตรง M ผ่านจุด $B(-4,8)$ และ $C(-10,0)$

ดังนั้น จะได้สมการของ M คือ
$$\frac{y-0}{x-(-10)}=\frac{8-0}{-4-(10)}=\frac{4}{3}$$
$$3y=4x+40$$
$$0=4x-3y+40$$

จะได้ระยะระหว่าง $(0,0)$ กับ M คือ $\frac{|4(0)-3(0)+40|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{40}{5}=8$

31. ให้ A เป็นเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับอสมการ $\log_2 x + \log_3 x \geq (\log_2 x)(\log_3 x)$ และให้ a เป็นขอบเขตล่างมากที่สุดของเซต $A \cap [0,9]$ และให้ b เป็นขอบเขตบนน้อยที่สุดของเซต $A \cap [0,9]$ ค่าของ $a + b$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 7

เนื่องจากการย้ายข้างแบบคูณหารในอสมการ จะทำไม่ได้จนกว่าจะรู้เครื่องหมายของตัวที่ย้าย
ดังนั้น ข้อนี้จะแบ่งกรณีให้รู้เครื่องหมายของค่า log ก่อนและเนื่องจาก หลัง log ต้องเป็นบวก ดังนั้น $x > 0$

กรณี $0 < x < 1$: จะได้ $\log_2 x$ และ $\log_3 x$ เป็นลบทั้งคู่ $\rightarrow \log_2 x + \log_3 x \geq (\log_2 x)(\log_3 x)$

ลบ + ลบ ≥ (ลบ)(ลบ)

ลบ ≥ บวก ✗

ดังนั้น กรณีนี้ไม่มีคำตอบ

กรณี $x = 1$: แทนค่าเช็คเลย จะได้ $\log_2 1 + \log_3 1 \geq (\log_2 1)(\log_3 1)$

$0 + 0 \geq (0)(0)$ ✓

ดังนั้น $x = 1$ เป็นคำตอบได้

กรณี $x > 1$: จะได้ $\log_2 x$ และ $\log_3 x$ เป็นบวกทั้งคู่ $\rightarrow$ หารตลอดด้วย $(\log_2 x)(\log_3 x)$ ได้

$$\frac{\log_2 x + \log_3 x}{(\log_2 x)(\log_3 x)} \geq \frac{(\log_2 x)(\log_3 x)}{(\log_2 x)(\log_3 x)}$$

$$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_2 x} \geq 1$$

$$\log_x 3 + \log_x 2 \geq 1$$

$$\log_x 6 \geq x$$

$$6 \geq 1$$

ทำแบบนี้ได้ เพราะ $x > 1$

กรองด้วยเงื่อนไขของกรณี $x > 1$ จะได้คำตอบในกรณีนี้คือ $[1,6]$

รวมคำตอบสามกรณี จะได้ $A = [1,6]$ ดังนั้น $A \cap [0,9] = [1,6] \rightarrow$ ขอบเขตล่างมากสุด $a = 1$

$\rightarrow$ ขอบเขตบนน้อยสุด $b = 6$

จะได้ $a + b = 1 + 6 = 7$

32. มีลูกแก้วขนาดเดียวกัน 7 ลูก เป็นลูกแก้วสีแดง 2 ลูก ลูกแก้วสีเขียว 2 ลูก และลูกแก้วสีขาว 3 ลูก ต้องการจัดเรียงลูกแก้วทั้ง 7 ลูกเป็นแถวตรง โดยที่ลูกแก้วสองลูกใด ๆ ที่เรียงติดกัน มีสีแตกต่างกัน จำนวนวิธีจัดเรียงลูกแก้วดังกล่าวเท่ากับเท่าใด

ตอบ 38

ให้สีแดงคือ R สีเขียวคือ G และสีขาวคือ W
จะเอา R กับ G (รวม 4 ลูก) มาเรียงกันก่อน แล้วค่อยเสียบ W ทั้งสามลูกลงไป
จะเห็นว่าตอนเรียง R กับ G ทั้ง 4 ลูก ลูกสีเดียวกันจะยังติดกันได้อยู่ เพราะยังเอา W มาแทรกให้มันแยกกันตอนหลังได้

ดังนั้น การเสียบ W ตอนสุดท้าย จะขึ้นกับว่าตอนแรกมี R ติดกัน หรือ G ติดกัน ในรูปแบบไหน
$\longrightarrow$ จะแบ่งกรณี ตามการติดกันของ R และการติดกันของ G

<u>กรณีติดกัน 2 คู่</u> : กรณีนี้ จะมี 2 แบบ คือ <u>R R</u> <u>G G</u> กับ <u>G G</u> <u>R R</u>

จะเห็นว่าจำเป็นต้องเสียบ W สองลูกลงไปแทรก ระหว่างคู่ที่ติดกันทั้ง 2 คู่ (เช่น <u>R W R</u> <u>G W G</u>)

W อีกลูกที่เหลือ ต้องไม่ติดกับ W สองลูกแรก จะเหลือช่อง __ R W R __ G W G __ ให้เสียบได้ 3 ช่อง

เลือก 1 ช่อง ให้ W ลูกที่เหลือ ได้ 3 แบบ $\longrightarrow$ รวมจำนวนแบบกรณีนี้ จะได้ $2\times3=6$ แบบ

<u>กรณีติดกัน 1 คู่</u> : กรณีนี้ จะมี 2 แบบ คือ G <u>R R</u> G กับ R <u>G G</u> R

จะเห็นว่าจำเป็นต้องเสียบ W หนึ่งลูกลงไปแทรกระหว่างคู่ที่ติดกัน (เช่น G <u>R W R</u> G)

W อีกสองลูกที่เหลือต้องไม่ติดกับ W ลูกแรก จะเหลือช่อง __ G __ R W R __ G __ ให้เสียบได้ 4 ช่อง

เลือก 2 ช่องจาก 4 ช่อง ให้ W สองลูกที่เหลือได้ $\binom{4}{2}=\frac{4\times3}{2}=6$ แบบ $\longrightarrow$ รวมจำนวนแบบ $2\times6=12$ แบบ

<u>กรณีไม่ติดกันเลย</u> : กรณีนี้ จะมี 2 แบบ คือ R G R G และ G R G R

จะมีช่อง __ R __ G __ R __ G __ ให้เสียบ W ได้ 5 ช่อง

เลือก 3 ช่องจาก 5 ช่องให้ W ทั้งสามลูกได้ $\binom{5}{3}=\frac{5\times4\times3}{3\times2}=10$ แบบ $\longrightarrow$ รวมจำนวนแบบ $2\times10=20$ แบบ

รวมทุกกรณี จะได้จำนวนแบบทั้งหมด $=6+12+20=38$ แบบ

33. กำหนดให้ $f(x)=2x+5$ และ $g(x)=ax^2+bx+c$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

ถ้า $(f^{-1}\circ g)(0)=2$, $\int_0^1 f^{-1}(g(x))dx=1$ และ $(f^{-1}\circ g)(x)$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=1$

แล้วค่าของ $g(1)$ เท่ากับเท่าใด

<u>ตอบ 6</u>

จาก $(f^{-1}\circ g)(0)=2$

$$f^{-1}(g(0))=2$$

$$g(0)=f(2)$$

$$a(0^2)+b(0)+c=2(2)+5$$

$$c=9$$

ดังนั้น $g(x)=ax^2+bx+9$

หา f^{-1} : $f(x)=2x+5$

$$y=2x+5$$

$$\frac{y-5}{2}=x$$

$$\frac{x-5}{2}=y$$

ดังนั้น $f^{-1}(x)=\frac{x-5}{2}$

จะได้ $(f^{-1}\circ g)(x)=f^{-1}(g(x))$

$$=f^{-1}(ax^2+bx+9)$$

$$=\frac{ax^2+bx+9-5}{2}$$

$$=\frac{a}{2}x^2+\frac{b}{2}x+2$$

$\big\downarrow$ ดิฟ

มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=1$ $\quad ax+\frac{b}{2}$

แสดงว่า ดิฟ = 0 เมื่อ $x=1$ $a(1)+\frac{b}{2}=0$

$$2a+b=0 \quad ...(1)$$

$$\int_0^1 f^{-1}(g(x))dx=1$$

$$\int_0^1 \frac{a}{2}x^2+\frac{b}{4}x+2dx=1$$

$$\left.\frac{a}{6}x^3+\frac{b}{4}x^2+2x\right|_0^1=1$$

$$\left(\frac{a}{6}+\frac{b}{4}+2\right)-0=1$$

$$\frac{a}{6}+\frac{b}{4}+2=1$$

$$2a+3b=-12 \quad ...(2)$$

$$(2)-(1):\quad 2b=-12$$
$$b=-6$$
$$(1):\quad 2a-6=0$$
$$a=3$$

แทนค่า a, b จะได้ $g(x)=3x^2-6x+9$ ดังนั้น $g(1)=3(1^2)-6(1)+9=6$

34. คะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงความถี่ ดังนี้
เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก
ถ้าเปอร์เซ็นไทล์ที่ 25 ของคะแนนสอบนี้เท่ากับ 80.5 คะแนน
และส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์เท่ากับ 7.5 แล้วจำนวนนักเรียนที่สอบได้
คะแนนมากกว่า 80 คะแนนเท่ากับเท่าใด

ช่วงคะแนน	จำนวนนักเรียน
66 – 70	2
71 – 75	3
76 – 80	a
81 – 85	5
86 – 90	7
91 – 95	b
96 - 100	8

<u>ตอบ 24</u>

เนื่องจาก $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$ จะได้ $P_{25}=Q_1$ ดังนั้น $Q_1=80.5$ ด้วย

จากส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ = 7.5 จะได้ $\frac{Q_3-Q_1}{2}=7.5 \longrightarrow$ แทนค่า Q_1 จะได้ $\frac{Q_3-80.5}{2}=7.5$

$$Q_3=95.5$$

จะเห็นว่า $Q_1=80.5$ และ $Q_3=95.5$ เป็นขอบชั้นพอดี$\longrightarrow$ใช้สูตร “คนสุดท้ายของชั้น มีค่าเท่ากับขอบบน” ได้

	ช่วงคะแนน	จำนวนนักเรียน
	66 – 70	2
	71 – 75	3
$Q_1 = 80.5 \longrightarrow$	76 – 80	a
	81 – 85	5
	86 – 90	7
$Q_3 = 95.5 \longrightarrow$	91 – 95	b
	96 - 100	8

$a + 5$ คน

$N - 8$

จะใช้ $2+3+a+5+7+b$ ก็ได้
แต่เหลืออีกแค่ชั้นเดียวที่มี 8 คน $\longrightarrow$ ใช้ $N-8$ ง่ายกว่า

จะได้ คนที่ $5 + a$ ได้ 80.5 คะแนน และ คนที่ $N-8$ ได้ 95.5 คะแนน

นั่นคือ Q_1 อยู่ตำแหน่งที่ $5+a$ และ Q_3 อยู่ตำแหน่งที่ $N-8$

ดังนั้น $\frac{1}{4}N = 5+a$ และ $\frac{3}{4}N = N-8$

$$\frac{32}{4} = 5+a \qquad 3N = 4N - 32$$

$$3 = a \qquad 32 = N$$

ข้อนี้ ถ้าไม่คิดอะไรมาก จะมองว่านักเรียนที่ได้คะแนนมากกว่า 80 คะแนน คือนักเรียนตั้งแต่ชั้นที่ 4 ลงไปก็ได้ เนื่องจาก 3 ชั้นแรก มีนักเรียน $5+a = 5+3 = 8$ คน ดังนั้น ชั้นที่เหลือ $= 32 - 8 = 24$ คน

แต่ถ้าจะคิดข้อนี้ให้ถูกต้องจริง ๆ ต้องหาตำแหน่งของ 80 คะแนน โดยสมมติให้ 80 คะแนน อยู่ตำแหน่งที่ k

แทนในสูตรจะได้ $x = L + \left(\frac{k - F_L}{f_x}\right)I$

$$80 = 75.5 + \left(\frac{k-(2+3)}{a}\right)5$$

$$4.5 = \left(\frac{k-5}{3}\right)5$$

$$7.7 = k$$

ดังนั้น จะมีคนได้มากกว่า 80 คะแนนอยู่ $N - k = 32 - 7.7 = 24.3$ คน
ถ้าอยู่ในห้องสอบ ผมคงเสี่ยงเดาใจคนออกข้อสอบว่าอยากให้คิดแบบง่ายๆ จึงน่าจะตอบ 24 คน

35. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงปกติ ถ้านักเรียนที่สอบได้คะแนนน้อยกว่า 74คะแนน มีจำนวนคิดเป็นร้อยละ 97.73 และนักเรียนที่สอบได้คะแนน 53 คะแนน จะตรงกับเปอร์เซ็นไทล์ที่ 6.68แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มนี้เท่ากับเท่าใด

กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐานระหว่าง 0 ถึง Z ดังนี้

Z	0.5	1	1.5	2	2.5
A	0.1915	0.3431	0.4332	0.4773	0.4938

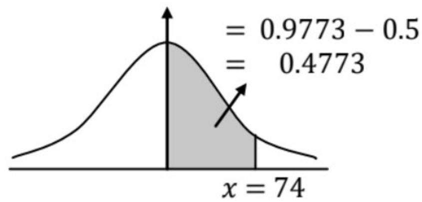
<u>ตอบ 62</u>

น้อยกว่า 74 คะแนน คิดเป็น 97.73% = พื้นที่ 0.9773 (เกิน 0.5 ⟶ อยู่ฝั่งขวา ดังรูป)

หักครึ่งซ้าย 0.5 ⟶ จะได้พื้นที่ที่ใช้เปิดตาราง = 0.4773 ดังรูป

เปิดตาราง $A = 0.4773$ จะได้ $z = 2$

ใช้สูตร $Z = \dfrac{x - \bar{x}}{s}$ จะได้ $2 = \dfrac{74 - \bar{x}}{s}$ .....(1)



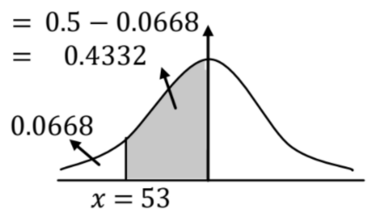
$P_{6.68} = 53$ คะแนน ⟶ น้อยกว่า 53 มี 6.68% = พื้นที่ 0.0668 (น้อยกว่า 0.5 ⟶ อยู่ฝั่งซ้าย ดังรูป)

คิดเป็นพื้นที่ที่ใช้เปิดตาราง $= 0.5 - 0.0668 = 0.4332$

เปิดตาราง $A = 0.4332$ จะได้ $z = 1.5$

เป็นพื้นที่ฝั่งซ้าย ⟶ z เป็นลบ จะได้ $z = -1.5$

ใช้สูตร $Z = \dfrac{x - \bar{x}}{s}$ จะได้ $-1.5 = \dfrac{53 - \bar{x}}{s}$ .....(2)



$$
\begin{aligned}
(1) \div (2): \quad \frac{2}{-1.5} &= \frac{74 - \bar{x}}{s} \div \frac{53 - \bar{x}}{s} \\
-\frac{4}{3} &= \frac{74 - \bar{x}}{s} \cdot \frac{s}{53 - \bar{x}} \\
-212 + 4\bar{x} &= 222 - 3\bar{x} \\
7\bar{x} &= 434 \\
\bar{x} &= 62
\end{aligned}
$$

36. กำหนดให้ I เป็นเซตของจำนวนเต็มให้ $f: I \longrightarrow I$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $f(n) = \begin{cases} (f \cdot f)(n-4) & ,n \geq 60 \\ n+3 & ,n \leq 60 \end{cases}$

ค่าของ $f\Big(f\big(f(60)\big)\Big)$ เท่ากับเท่าใด

<u>ตอบ 63</u>

ทำข้างในก่อน จะได้ $f(60)$ ใช้สูตรล่าง ได้ $f(60) = 60 + 3 = 63$

หา f รอบที่สอง $\longrightarrow$ ใส่ f ทั้งสองข้างจะได้ $f(f(60)) = f(63)$ $\quad$ $63 > 60 \longrightarrow$ ใช้สูตรแรก

$$
\begin{aligned}
&= f(63) \\
&= (f \circ f)(63-4) \\
&= (f \circ f)(\ 59\ ) \\
&= f\big(f(59)\big) \\
&= f(59+3) \\
&= f(62) && 62 > 60 \longrightarrow \text{ใช้สูตรแรก} \\
&= (f \circ f)(62-4) \\
&= (f \circ f)(\ 58\ ) \\
&= f\big(f(58)\big) \\
&\vdots \\
&= f(60) && 60 \leq 60 \longrightarrow \text{ใช้สูตรแรก} \\
&= 60+3 \\
&= 63
\end{aligned}
$$

จะวนแบบนี้ไปเรื่อย ๆ จนถึง 60
จึงเปลี่ยนเป็นใช้สูตรที่สอง

ดังนั้น $f\big(f(60)\big) = f(63) = 63$

หา f รอบที่สาม $\longrightarrow$ ใส่ f ทั้งสองข้างจะได้ $f\Big(f\big(f(60)\big)\Big) = f(63)$

$= 63$ $\quad$ จากที่เคยทำยาวๆ ในรอบที่สอง

37. กำหนดให้ AX = B เป็นสมการเมทริกซ์ โดยที่ $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ b & -a & 0\\ 3 & -1 & -1\end{bmatrix}$ $X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}9\\ a\\ -10\end{bmatrix}$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $\det A=15$ และ $y=1$ เป็นคำตอบของระบบสมการนี้ แล้ว $(a-b)^2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

<u>**ตอบ 9**</u>

โจทย์กำหนดให้ $\det A=15$ $\longrightarrow$ ใช้สูตร det แบบ 3×3 จะได้

$$\det A=(a+0-2b)-(-6a+0+2b)$$
$$=7a-4b$$

ดังนั้น $7a-4b=15$ ...(1)

โจทย์ให้ $y=1$ เป็นคำตอบ $\longrightarrow$ ถ้าใช้กฎของเครเมอร์ในการหาค่า y ต้องได้ $y=1$

เนื่องจาก y เป็นตัวแปรในแถวที่ 2 $\longrightarrow$ ต้องเอา $B=\begin{bmatrix}9\\ a\\ -10\end{bmatrix}$ ไปเสียบแทนที่หลักที่ 2

จะได้ $y=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 9 & 2\\ b & a & 0\\ 3 & -10 & -1\end{vmatrix}}{\det A}=\dfrac{(-a+0-20b)-(6a+0-9b)}{15}=\dfrac{-7a-11b}{15}$

ดังนั้น $\dfrac{-7a-11b}{15}=1$

$$-7a-11b=15 \quad ...(2)$$

$$(1)+(2):-15b=30$$
$$b=-2$$
$$(1):\ 7a-4(-2)=15$$
$$a=1$$

จะได้ $(a-b)^2=(1-(-2))^2=9$

38. ค่าของ $\lim_{x\to 3}\dfrac{3^x x-3^{x+1}}{\sqrt[3]{x-2}-1}$ เท่ากับเท่าใด

<u>**ตอบ 81**</u>

ถ้าแทน $x=3$ จะได้ $\dfrac{3^3 3-3^{3+1}}{\sqrt[3]{3-2}-1}=\dfrac{81-81}{1-1}=\dfrac{0}{0}$ ดังนั้น ต้องจัดรูป ให้ $x-3$ โผล่ออกมาตัดกันก่อน

โดย ตัวเศษ จะใช้การแยกตัวประกอบ และ ตัวส่วน จะทำให้เป็นผลต่างกำลังสามเพื่อกำจัดรูทสาม ดังนี้

$$\frac{3^x x-3^{x+1}}{\sqrt[3]{x-2}-1}=\frac{3^x x-3^x 3^1}{\sqrt[3]{x-2}-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{x-2}^2+\sqrt[3]{x-2}+1}{\sqrt[3]{x-2}^2+\sqrt[3]{x-2}+1}=\frac{3^x(x-3)\left(\sqrt[3]{x-2}^2+\sqrt[3]{x-2}+1\right)}{\sqrt[3]{x-2}^2-1^3}$$

คูณ $น^2+นล+ล^2$ ทั้งเศษและส่วนเพื่อเข้าสูตร

$(น-ล)(น^2+นล+ล^2)=น^3-ล^3$

$$=\frac{3^x(x-3)\left(\sqrt[3]{x-2}^2+\sqrt[3]{x-2}+1\right)}{x-3}$$

$$=3^x\left(\sqrt[3]{x-2}^2+\sqrt[3]{x-2}+1\right)$$

เมื่อตัด $x-3$ ได้แล้ว ลองแทน $x=3$ ใหม่

จะได้ $3^3\left(\sqrt[3]{3-2}^2+\sqrt[3]{3-2}+1\right)=81$

39. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ $(1+i)\overline{z}+(3-i)z=6+2i$ เมื่อ $i^2=-1$ และ $\overline{z}$ แทนสังยุค (conjugate) ของ z ค่าของ $|(z-\overline{z})(z+\overline{z})|$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 4

ให้ $z=a+bi$ จะได้ $\overline{z}=a-bi$ $\longrightarrow$ แทนในสมการ จะได้

$$(1+i)(a-bi)+(3-i)(a+bi)=6+2i$$

$$a-bi+ai+b+3a+3bi-ai+b=6+2i$$

$$4a+2b+2bi=6+2i$$

เทียบ ส่วนจริง= ส่วนจริง

ส่วนจินตภาพ= ส่วนจินตภาพ

$$4a+2b=6 \qquad\qquad 2b=2$$

$$4a+2(1)=6 \qquad\qquad b=1$$

$$a=1$$

ดังนั้น $z=1+i$ และ $\overline{z}=1-i$ จะได้ $z-\overline{z}=1+i-(1-i)=2i$ และ $z+\overline{z}=1+i+1+i=2$

ดังนั้น $|(z-\overline{z})(z+\overline{z})|=|(2i)(2)|=4$

40. กำหนดให้ $a_1,a_2,a_3,...,a_n,...$ เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนเต็มบวก โดยที่ $a_1=1$ และ $a_8=36$

ถ้า $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=3$

แล้ว n เท่ากับเท่าใด

ตอบ 52

จากสูตรลำดับเลขคณิต $a_n=a_1+(n-1)d$ แทน $n=8$ จะได้ $a_8=a_1+(8-1)d$

$$36=1+7d$$

$$5=d$$

จัดรูปสิ่งที่โจทย์ถาม โดยคูณคอนจูเกตทั้งเศษและส่วนที่แต่ละพจน์ ให้เข้าสูตรผลต่างกำลังสองเพื่อกำจัดรูท

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}\cdot\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}^2-\sqrt{a_2}^2}=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_1-a_2}=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{-(a_1-a_2)}=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{-d}$$

ลำดับเลขคณิต พจน์คู่ที่ติดกันลบกัน = d

$$\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}\cdot\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{\sqrt{a_2}^2-\sqrt{a_3}^2}=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{a_2-a_3}=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{-(a_2-a_3)}=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{-d}$$

:

:

จะได้สมการคือ $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=3$

$$\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{-d}+\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{-d}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_4}}{-d}+\ldots+\frac{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}}{-d}=3$$

$$\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}+\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}+\sqrt{a_3}-\sqrt{a_4}+\ldots+\sqrt{a_n-1}-\sqrt{a_n}=-3d$$

$$\sqrt{a_1}-\cancel{\sqrt{a_2}}+\cancel{\sqrt{a_2}}-\cancel{\sqrt{a_3}}+\cancel{\sqrt{a_3}}-\cancel{\sqrt{a_4}}+\ldots+\cancel{\sqrt{a_n-1}}-\sqrt{a_n}=-3d$$

$$\sqrt{a_1}-\sqrt{a_1+(n-1)d}=-3d$$

$$\sqrt{1}-\sqrt{1+(n-1)5}=-3(5)$$

$$16=\sqrt{5n-4}$$

$$256=5n-4$$

$$52=n$$

41. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง และ $f(x)=\begin{cases} x+\sqrt{x^2+5} & ,x\geq a \\ \dfrac{15}{\sqrt{x^2+5}} & ,x<a \end{cases}$

ถ้าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องทุกจำนวนจริง x แล้วค่าของ $f(a)+f(-a)$ เท่ากับเท่าใด

<u>ตอบ 10</u>

f ต่อเนื่อง แสดงว่าค่า f ของแต่ละสูตร ต้องมีค่าเท่ากันตรงรอยต่อของสูตร

รอยต่อของสูตร อยู่ที่ $x=a$ ดังนั้น

$$a+\sqrt{a^2+5}=\frac{15}{\sqrt{a^2+5}}$$

คูณ $\sqrt{a^2+15}$ ตลอด

$$a\sqrt{a^2+5}+a^2+5=15$$

$$a\sqrt{a^2+5}=10-a^2$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$a^2\left(a^2+5\right)=\left(10-a^2\right)^2$$

$$a^4+5a^2=100-20a^2+a^4$$

$$25a^2=100$$

$$a^2=4$$

$$a=\pm 2$$

เนื่องจากมีการยกกำลังสองทั้งสองข้าง ⟶ ต้องตรวจคำตอบ

$a=2$: $2+\sqrt{2^2+5}=\dfrac{15}{\sqrt{2^2+5}}$

$2+3=\dfrac{15}{3}$ ✓

$a=-2$: $-2+\sqrt{(-2)^2+5}=\dfrac{15}{\sqrt{(-2)^2+5}}$

$-2+3=\dfrac{15}{3}$ ✗

จะได้ $a = 2$ แทนในสูตรของ f จะได้ $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 5} & , x \geq 2 \\ \dfrac{15}{\sqrt{x^2 + 5}} & , x < 2 \end{cases}$

ดังนั้น $f(a) + f(-a) = f(2) + f(-2)$

$$= 2 + \sqrt{2^2 + 5} + \frac{15}{\sqrt{(2)^2 + 5}} = 10$$

42. ถ้า $2\sin^2\theta = 3\cos\theta$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ แล้วค่าของ $\operatorname{cosec}^2(\frac{\pi}{2} - \theta)\cos^2\theta + \frac{\tan\theta}{\operatorname{cosec}2\theta}$ เท่ากับเท่าใด

<u>**ตอบ 2.5**</u>

แก้สมการ $2\sin^2\theta = 3\cos\theta$

$2(1 - \cos^2\theta) = 3\cos\theta$

$2 - 2\cos 2\theta = 3\cos\theta$

$0 = 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2$

$0 = (2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 2)$

$\cos\theta = 12, \cancel{-2}$ ค่า cos เป็นได้ตั้งแต่ -1 ถึง 1 เท่านั้น

$\theta = 60^\circ$

ดังนั้น $\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cos^2\theta + \frac{\tan\theta}{\operatorname{cosec}2\theta} = \operatorname{cosec}^2\left(90^\circ - 60^\circ\right)\cos^2 60^\circ + \frac{\tan 60^\circ}{\operatorname{cosec}120^\circ}$

$$= 2^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$= 1 + 1.5 \quad = 2.5$$

43. ให้ A เป็นเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับสมการ $4^{x}-4\left(4^{\sqrt{x}}\right)=3\left(2^{x+\sqrt{x}}\right)$

ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต A เท่ากับเท่าใด

<u>ตอบ 4</u>

$$4^{x}-4(4^{\sqrt{x}})=3(2^{x+\sqrt{x}})$$

$$2^{2x}-4(2^{2\sqrt{x}}) = 3(2^{x}\cdot 2^{\sqrt{x}})$$

$$a^{2}-4b^{2}=3ab$$

เปลี่ยนตัวแปร ให้ $2^{x}=a$, $2^{\sqrt{x}}=b$

$$a^{2}-3ab-4b^{2}=0$$

$$(a-4b)(a+b)=0$$

$a=4b$

$2^{x}=2^{2}\cdot 2^{\sqrt{x}}$

$2^{x}=2^{2+\sqrt{x}}$

$x=2+\sqrt{x}$

$a=-b$

$2^{x}=-2^{\sqrt{x}}$

ไม่มีคำตอบ (ฝั่งซ้ายเป็นบวกเสมอ ฝั่งขวาเป็นลบเสมอ)

$$x-\sqrt{x}-2=0$$

$$\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)=0$$

$\sqrt{x}=2$

$x=4$

$\sqrt{x}=-1$

ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง

4 ไม่ติดลบ จึงเป็นค่า x ในรูทได้ จะได้ $A=\{4\}\longrightarrow$ ผลบวกสมาชิกใน $A=4$

44. ผลการสำรวจกลุ่มคนจำนวน 120 คน เกี่ยวกับสายตาปกติและสายตาสั้น พบว่าอัตราส่วนของจำนวนคนที่มีสายตาปกติต่อจำนวนคนที่มีสายตาสั้นเป็น $3:2$ ในกลุ่มคนที่มีสายตาปกติ มีอัตราส่วนจำนวนผู้หญิงต่อจำนวนผู้ชายเป็น $5:1$ ในกลุ่มคนที่มีสายตาสั้น มีอัตราส่วนของจำนวนเด็กต่อจำนวนผู้ใหญ่ เป็น $1:3$ ผลรวมของจำนวนผู้หญิงที่มีสายตาปกติและจำนวนเด็กที่มีสายตาสั้นเท่ากับเท่าใด

<u>ตอบ 72</u>

ใน 120 คน มี ตาปกติ : ตาสั้น $3:2$ $\longrightarrow$ ตาปกติ $= \dfrac{3}{3+2}\cdot 120 = 72$ คน

$\longrightarrow$ ตาสั้น $= 120 - 72 = 48$ คน

ในตาปกติ 72 คน มี หญิง : ชาย $= 5:1 \longrightarrow$ หญิงตาปกติ $= \dfrac{5}{5+1}\cdot 72 = 60$ คน

ในตาสั้น 48 คน มี เด็ก : ผู้ใหญ่ $= 1:3 \longrightarrow$ เด็กตาสั้น $= \dfrac{1}{1+3}\cdot 48 = 12$ คน

ดังนั้น หญิงตาปกติ+ เด็กตาสั้น $= 60 + 12 = 72$ คน

45. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก กำหนดให้ $P = ax - 15y$ เป็นฟังก์ชันจุดประสงค์

โดยมีอสมการข้อจำกัด ดังนี้ $3x + by \geq 9$

$3x + 2by \leq 18$

$1 \leq x \leq 5$ และ $y \geq 0$

ถ้าค่าของ P มีค่าน้อยที่สุด เท่ากับ -8.25 และ ค่าของ P มีค่ามากที่สุด เท่ากับ 15 แล้วค่าของ $a^2 + b^2$ เท่ากับเท่าใด

<u>ตอบ 109</u>

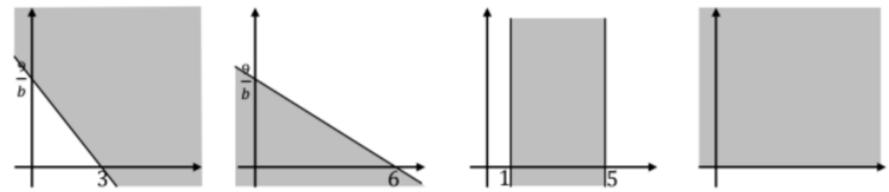
หาจุดตัดแกนของแต่ละสมการ (โดยการแทน $x = 0$ กับแทน $y = 0$)เพื่อวาดกราฟและหาพื้นที่ที่ซ้อนทับกัน

$3x + by = 9$: ตัดแกน x ที่ $3x + b(0) = 9$ ตัดแกน y ที่ $3(0) + by = 9$

$x = 3$ $y = \dfrac{9}{b}$

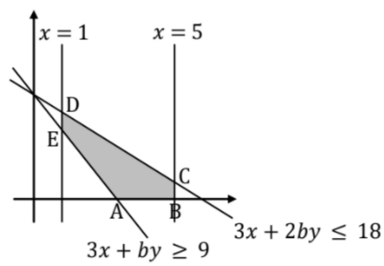
$3x + 2by = 18$: ตัดแกน x ที่ $3x + 2b(0) = 18$ ตัดแกน y ที่ $3(0) + 2by = 18$

$x = 6$ $y = \dfrac{9}{b}$



$3x + by \geq 9$ (b เป็นบวก → $\frac{9}{b}$ เป็นบวก) $\quad 3x + 2by \leq 18 \quad 1 \leq x \leq 5 \quad y \geq 0$

หาพื้นที่ที่ซ้อนทับกัน จะได้จุดมุม A, B, C, D, E ดังรูป



จากจุดตัดแกนที่เคยหา จะได้พิกัด A(3,0) และ B(5,0)

จุด C แทน $x = 5$ ใน

$$3x + 2by = 18$$
$$3(5) + 2by = 18$$
$$y = \frac{3}{2b} \quad \rightarrow C\left(5, \frac{3}{2b}\right)$$

จุด D แทน $x = 1$ ใน

$$3x + 2by = 18$$
$$3(1) + 2by = 18$$
$$y = \frac{15}{2b} \quad \rightarrow D\left(1, \frac{15}{2b}\right)$$

จุด E แทน $x = 1$ ใน

$$3x + by = 9$$
$$3(1) + by = 9$$
$$y = \frac{6}{2b} \quad \rightarrow E\left(1, \frac{6}{2b}\right)$$

	$P = ax - 15y$
A(3,0)	$3a$
B(5,0)	$5a$
$C\left(5, \frac{3}{2b}\right)$	$5a - \frac{45}{2b}$
$D(1, \frac{15}{2b})$	$a - \frac{225}{2b}$
$E(1, \frac{6}{b})$	$a - \frac{90}{b}$

→ มากสุด (B) ; → น้อยสุด (D)

เอาจุดมุมไปแทนในสมการของ P แล้วหาค่ามากสุด น้อยสุด

เนื่องจาก a เป็นบวก $\longrightarrow 5a > 3a > a$

b เป็นบวก $\longrightarrow \frac{225}{2b} > \frac{30}{b} > \frac{45}{2b}$

ดังนั้น P มากสุด $= 5a$

P น้อยสุด $= a - \frac{225}{2b}$

โจทย์ให้ P มากสุด $=15$ ดังนั้น $5a=15$ จะได้ $a=3$

โจทย์ให้ P น้อยสุด $=-8.25$ ดังนั้น $a-\dfrac{225}{2b}=-8.25$

$$3-\frac{225}{2b}=-8.25$$

$$11.25=\frac{225}{2b}$$

$$b=\frac{225}{22.5}=10$$