เฉลย

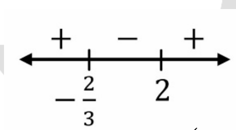
1. 2	11. 1	21. 2	31. 8	41. 15
2. 1	12. 4	22. 3	32. 181	42. 8
3. 2	13. 1	23. 3	33. 4.5	43. 1806
4. 3	14. 4	24. 1	34. 16	44. 0.5
5. 2	15. 3	25. 3	35. 35	45. 60
6. 4	16. 3	26. 2	36. 0	
7. 1	17. 4	27. 1	37. 4	
8. 4	18. 1	28. 2	38. 3.97	
9. 3	19. 4	29. 4	39. 112	
10. 1	20. 2	30. 3	40. 132	

แนวคิด

1. **ตอบ 2**

วิธีทำ พิจารณา $P(x)$ แก้สมการ $3x^2 - 4x - 4 < 0$

$$(3x+2)(x-2) < 0$$



ได้คำตอบคือ $\left(-\frac{2}{3}, 2\right)$

ซึ่งจะเห็นว่า เอกภพสัมพันธ์ $(1,2)$ เป็นสับเซตของ $\left(-\frac{2}{3}, 2\right)$

ดังนั้น ทุกตัวในเอกภพสัมพันธ์ จะทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

พิจารณา $Q(x)$ เนื่องจากทั้งสองฝั่งเป็นบวก จะยกกำลังสองทั้งสองข้าง

เพื่อกำจัดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ได้

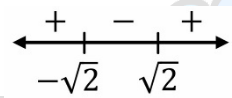
$$x^4 > \left(x^2-4\right)^2$$

$$x^4-\left(x^2-4\right)^2 > 0$$

$$(\qquad 4)\left(2x^2-4\right) > 0$$

$$8\left(x^2-2\right) > 0$$

$$8\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right) > 0$$



ได้คำตอบคือ $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},\infty\right)$

$=(-\infty,-1.414...)\cup\left(1.414...,\infty\right)$

จะเห็นว่า เอกภพสัมพัทธ์ $(1,2)$

มีทั้งส่วนที่อยู่ใน $(-\infty,-1.414...)\cup\left(1.414...,\infty\right)$ เช่น $x=1.9$

และส่วนที่ไม่อยู่ใน $(-\infty,-1.414...)\cup\left(1.414...,\infty\right)$ เช่น $x=1.1$

ดังนั้น บางตัวในเอกภพสัมพัทธ์จะทำให้ $Q(x)$ จริง แต่บางตัวจะทำให้ $Q(x)$ เป็นเท็จ

(ก) เนื่องจาก x ทุกตัวทำให้ $P(x)$ จริง ดังนั้น $\forall x[P(x)]$ เป็นจริง

เนื่องจาก x ทุกตัวทำให้ $Q(x)$ จริง และ x ตัวนั้นจะทำให้ $P(x)$ จริงด้วย

(เพราะ x ทุกตัวทำให้ $P(x)$ จริง)

ดังนั้น จะมี x บางตัวทำให้ $P(x)\wedge Q(x)$ เป็นจริง ดังนั้น $\exists x[P(x)\wedge Q(x)]$ เป็นจริง

ดังนั้น $\forall x[P(x)]\rightarrow\exists x[P(x)\wedge Q(x)]\equiv T\rightarrow T\equiv T$ จะได้ (ก) ถูก

(ข) เนื่องจาก มี x บางตัวทำให้ $Q(x)$ จริง ดังนั้น $\exists x[Q(x)]$ เป็นจริง

จะได้ $\exists x[Q(x)]\rightarrow\forall x[P(x)]\equiv T\rightarrow T\equiv T$ แต่(ข)บอกเป็นจริง ดังนั้น(ข) ผิด

2. **ตอบ 1**

วิธีทำ

(ก) ถ้า...แล้ว...จะเป็นจริงได้หลายแบบ จะจัดรูปให้เป็นเครื่องหมายอื่นก่อน

$$p \to (q \wedge r) \equiv \sim \vee (q \wedge r)$$
$$\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)$$
$$\equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$$

จะเห็นว่า $(p \to q) \wedge (p \to r)$ เป็นจริงได้แบบเดียว คือ $p \to q$ เป็นจริง และ $p \to r$ เป็นจริง

ดังนั้น $(p \to q) \leftrightarrow (p \to r) \equiv T \leftrightarrow T \equiv T$ จะได้ (ก) ถูก

(ข) $p \to (q \wedge r)$ เป็นจริง จะได้ p เป็นจริง และ $q \wedge r$ เป็นเท็จ

จะเห็นว่า แค่รู้ว่า p ข้างหลังเป็นจริง จะได้

$$[(\sim p \to q) \wedge r] \vee (p \vee \sim r)$$
$$\equiv [(\sim p \to q) \wedge r] \vee (T \vee \sim r)$$
$$\equiv [(\sim p \to q) \wedge r] \vee \; T$$
$$\equiv \quad T$$

จะได้ (ข) ถูก

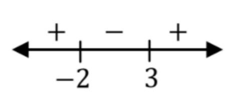
3. **ตอบ 2**

วิธีทำ

ลบ 1 ตลอด จะได้ $x - 1 < \sqrt{-(x^2 - x - 6)} < x + 2$

เนื่องจากในรูท เป็นลบไม่ได้ ดังนั้น

$$-(x^2 - x - 6) \geq 0$$
$$x^2 - x - 6 \leq 0 \quad \text{คูณ} -1 \text{ ตลอด ต้องกลับ} \geq \text{เป็น} \leq$$
$$(x - 3)(x + 2) \leq 0$$

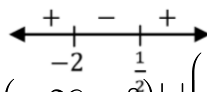


จะได้ $x \in [-2, 3]$ ...(1)

จากขอบเขตของ X ที่ได้ใน (1) จะเห็นว่า $X+2$ ทางขวาของอสมการไม่มีติดลบได้

ดังนั้น ถ้าพิจารณา อสมการคู่ขวา $\sqrt{-\left(X^2-X-6\right)}<X+2$ ก่อน จะสามารถยกกำลังสองทั้งสองข้างได้

$$\begin{aligned} -\left(x^2-x-6\right) &< (x+2)^2 \\ -x^2+x+6 &< x^2+4x+4 \\ 0 &< 2x^2+3x-2 \\ 0 &< (2x-1)(x+2) \end{aligned}$$



ได้ $x\in(-\infty,-2)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$

กรองด้วยขอบเขตจาก (1) $\longrightarrow\cap[-2,3]$

จะเหลือ $x\in\left(\frac{1}{2},3\right]$ ...(2)

พิจารณา อสมการคู่ซ้าย $x-1<\sqrt{-\left(X^2-X-6\right)}$

จากขอบเขตของ X ที่ได้ล่าสุดใน (2) จะเห็นว่า $x-1$ ทางซ้ายของอสมการยังเป็นได้ทั้งบวกและลบ ทำให้ยกกำลังสองทั้งสองข้างทันทีไม่ได้

$\longrightarrow$ จะแบ่งกรณีเป็น $x<1$ กับ $x\geq 1$ เพื่อให้รู้เครื่องหมายของ $x-1$ ก่อนค่อยคิดต่อ

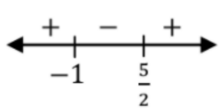
<u>กรณี</u> $x<1$: จะได้ $x-1$ เป็นลบ แต่ผลรูททางขวา ≥ 0 เสมอ

ดังนั้น ถ้า $x-1$ ทางซ้ายจะเป็นลบอสมการจะจริงเสมอ

ดังนั้น $x<1$ จะทำให้อสมการเป็นจริงเสมอ จะได้คำตอบในกรณีนี้คือ $x\in(-\infty,1)$ ...(3)

<u>กรณี</u> $1\leq X$: จะได้ $x-1\geq 0\longrightarrow$ จะยกกำลังสองทั้งสองข้างได้

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &< -\left(x^2-x-6\right) \\ x^2-2x+1 &< -x^2+x+6 \\ 2x^2-3x-5 &< 0 \\ (2x-5)(x+1) &< 0 \end{aligned}$$



จะได้ $x\in\left(-1,\frac{5}{2}\right)$

กรองคำตอบด้วยเงื่อนไขของกรณี $1 \le x \to \cap [1,\infty)$

จะเหลือคำตอบของกรณีนี้คือ $x \in \left[-1,\frac{5}{2}\right)$ ...(4)

รวมทั้งสองกรณี(3) กับ (4) $\to (-\infty,1) \;\cup\; \left[1,\frac{5}{2}\right)$

จะได้คำตอบของอสมการคู่ซ้าย คือ $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)$

พิจารณาร่วมกับคำตอบของอสมการคู่ขวาจาก (2) จะได้ $A = \left(\frac{1}{2},3\right] \cap \left(-\infty,\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$

ซึ่งจะเป็นสับเซตของ $(0,3)$ ในข้อ 2

4. **ตอบ 3**

วิธีทำ หา A : หาเรนจ์ ต้องจัดรูปให้ X แยกไปอยู่ตัวเดียว

$$y^2\left(1+|1-x|\right) = 4$$

$$1+|1-x| = \frac{4}{y^2}$$

$$|1-x| = \frac{4}{y^2}-1$$

แต่ X อยู่ในค่าสัมบูรณ์ จะแยก X ตัวเดียวลำบาก วิธีคือ เราจะจัดรูปให้ได้มากที่สุด แล้วอ้างว่าค่าสัมบูรณ์ ≥ 0

ดังนั้น $\to$ $\frac{4}{y^2}-1 \ge 0$

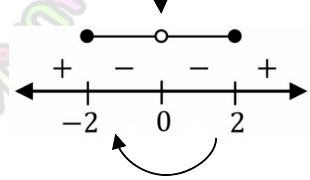
$$\frac{4-y^2}{y^2} \ge 0$$

คูณ -1 ตลอด ต้องกลับ $\ge$ เป็น $\le$

$$\frac{y^2-4}{y^2} \le 0$$

$$\frac{(y-2)(y+2)}{y^2} \le 0$$

ตัวส่วนใช้วงขาวเสมอ



กำลังคู่ ไม่ต้องกลับเครื่องหมาย

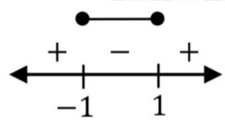
จะได้ $A = [-2,0) \cup (0,2]$

หา B : ในรูทต้อง ≥ 0 จะได้

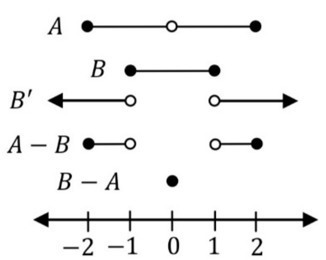
$$
\begin{aligned}
1-x^4 &\geq 0 \\
x^4-1 &\leq 0 \\
\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right) &\leq 0 \\
x^2-1 &\leq 0 \\
(x-1)(x+1) &\leq 0
\end{aligned}
$$

คูณ -1 ตลอด ต้องกลับ $\geq$ เป็น $\leq$

x^2+1 เป็นบวกเสมอ $\longrightarrow$ หารตลอดได้



จะได้ $B=[-1,1]$

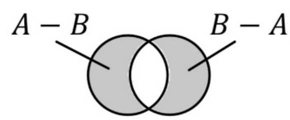


ก. หา B' ได้ดังรูป

จะเห็นว่า มีบสงตัวใน A (เช่น1) ที่ไม่อยู่ใน $B' \longrightarrow$ ก. ผิด

ข. จะเห็นว่า $A-B$ กับ $B-A$ ไม่มีส่วนซ้อนทับกัน

(ปกติ $A-B$ กับ $B-A$ จะมีส่วนซ้อนทับกันอยู่แล้ว ไม่ว่าจะเป็นเซตไหน)



ดังนั้น $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing \longrightarrow$ ข.ถูก

5. **ตอบ 2**

วิธีทำ

กรณี $X > 0$: จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์ จะได้ $|x| = x$ จะได้อสมการกลายเป็น $\frac{ax+1}{x} > 1$

และเนื่องจาก $X > 0$ จะสามารถคูณ X ตลอดได้โดยไม่ต้องกลับเครื่องหมายมากกว่าน้อยกว่า ได้เป็น

$$ax+1 > x$$
$$1 > x - ax$$
$$1 > (1-a)x$$
$$\frac{1}{1-a} > x$$

$0 < a < 1$ ทำให้ $1-a$ เป็นบวก $\longrightarrow$ ไม่ต้องการมากกว่าน้อยกว่า

พิจารณาร่วมกับเงื่อนไขของกรณี $(X > 0)$ จะได้คำตอบของกรณีนี้คือ $\left(0, \frac{1}{1-a}\right)$

กรณี $x = 0$: จะทำให้ตัวส่วนเป็น $0 \longrightarrow$ เป็นคำตอบไม่ได้

กรณี $x < 0$: จากสมบัติของค่าสมบูรณ์ จะได้ $|x| = -x$ จะได้สมการเป็น $\frac{-ax+1}{x} > 1$

และเนื่องจาก $x < 0$ จะสามารถ คูณ x ตลอดได้ แต่ต้องกลับเครื่องหมาย $>$ เป็น $<$

ได้เป็น
$$-ax+1 < x$$
$$1 < x + ax$$
$$1 < (1+a)x$$
$$\frac{1}{1+a} < x$$

$1+a$ เป็นบวก ดังนั้นไม่ต้องกลับมากกว่าน้อยกว่า

พิจารณาร่วมกับเงื่อนไขกรณี $(x < 0)$ จะเห็นว่า เป็นไปไม่ได้ที่ $\frac{1}{1+a} < x$

(เพราะ $\frac{1}{1+a}$ เป็นบวก)

ดังนั้น กรณี $x < 0$ จะไม่มีคำตอบ

รวมทุกกรณี จะได้คำตอบคือ $\left(0, \frac{1}{1-a}\right)$ ซึ่งจะเป็นสับเซตของข้อ 2

6. **ตอบ 4**

วิธีทำ จัดรูปสิ่งที่โจทย์ถามก่อน จะได้

$$\frac{(\cos^2\theta)(\sec\theta-1)}{1+\sin\theta}+\frac{(\sec^2\theta)(\sin\theta-1)}{1+\sec\theta}$$

$$=\frac{(\cos^2\theta)(\sec\theta-1)(1+\sec\theta)+(\sec^2\theta)(\sin\theta-1)(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)+(1+\sec\theta)}$$

$$=\frac{(\cos^2\theta)(\sec\theta-1)(\sec\theta+1)+(\sec^2\theta)(\sin\theta-1)(\sin\theta+1)}{(1+\sin\theta)+(1+\sec\theta)}$$

$(น-ล)(น+ล)=น^2-ล^2$

$$=\frac{(\cos^2\theta)(\sec^2\theta-1)+(\sec^2\theta)(\sin^2\theta-1)}{(1+\sin\theta)+(1+\sec\theta)}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$

$1+\cos^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$

$$=\frac{(\cos^2\theta)(\tan^2\theta)+(\sec^2\theta)(-\cos^2\theta)}{(1+\sin\theta)+(1+\sec\theta)}$$

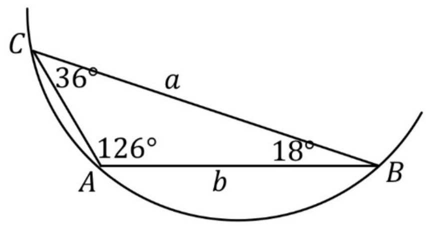
$$=\frac{1\quad+\quad-1}{(1+\sin\theta)+(1+\sec\theta)}$$

$$=\quad 0$$

<u>หมายเหตุ</u> : จะเห็นว่าได้คำตอบโดยที่ไม่ต้องหาค่า a

7. **ตอบ** 1

วิธีทำ จะได้มุม A ที่เหลือ $=180^\circ-18^\circ-36^\circ=126^\circ$ วาดได้ดังรูป



จากกฎของ sin จะได้ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\operatorname{Sin}B}=\dfrac{c}{\operatorname{Sin}C}=2R$

$\longrightarrow \dfrac{a}{\sin A}=2R$ จะได้ $a=2R\sin A$

$\longrightarrow \dfrac{b}{\sin B}=2R$ จะได้ $b=2R\sin B$

ดังนั้น $a-b=2R\sin A-2R\sin B$

$$=2R\left(\sin 126^\circ-\sin 18^\circ\right)$$

$$=2R\left(2\cos\frac{126^\circ+18^\circ}{2}\sin\frac{126^\circ-18^\circ}{2}\right)$$

$$\sin A+\sin B=2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\sin A-\operatorname{Sin}B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$=2R\left(2\cos 72^\circ\sin 54^\circ\right)$$

โคฟังก์ชัน

$$=2R\left(2\sin 18^\circ\cos 36^\circ\right)$$

เติม $\cos 18^\circ$ ทั้งเศษและส่วน จะเข้าสูตรมุมสองเท่าได้สอง

$$=2R\left(\frac{2\sin 18^\circ\cos 18^\circ\cos 36^\circ}{\cos 18^\circ}\right)$$

$$=2R\left(\frac{\sin 36^\circ\cos 36^\circ}{\cos 18^\circ}\right)$$

$$=R\left(\frac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ}\right)$$

โคฟังก์ชัน

$$=R$$

8. ตอบ 4

วิธีทำ

$$\frac{2\cos 10^\circ - \cos 50^\circ}{\sin 70^\circ - \cos 80^\circ} = \frac{\cos 10^\circ + \cos 10^\circ - \cos 50^\circ}{\sin 70^\circ - \sin 10^\circ}$$

$$= \frac{\cos 10^\circ + \left(-2\sin\frac{10^\circ + 50^\circ}{2}\sin\frac{10^\circ - 50}{2}\right)}{2\cos\frac{70^\circ + 10^\circ}{2}\sin\frac{70^\circ - 10^\circ}{2}}$$

$$= \frac{\cos 10^\circ + \left(-2\sin 30^\circ \sin\left(-20^\circ\right)\right)}{2\sin 40^\circ \sin 30^\circ}$$

$$= \frac{\cos 10^\circ + \left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 20^\circ\right)}{2\cos 40^\circ\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\cos 10^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ}$$

$$= \frac{\cos 10^\circ + \cos 70^\circ}{\cos 40^\circ}$$

$$= \frac{2\cos\frac{10^\circ + 70^\circ}{2} + \cos\frac{10^\circ - 70^\circ}{2}}{\cos 40^\circ}$$

$$= \frac{2\cos 40^\circ \cos\left(-30^\circ\right)}{\cos 40^\circ}$$

$$= 2\cos 30^\circ \quad = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad = \sqrt{3}$$

ดังนั้น $\arctan\left(\frac{2\cos 10^\circ - \cos 50^\circ}{\sin 70^\circ - \cos 80^\circ}\right) = \arctan\sqrt{3} = 60^\circ$

9. **ตอบ 3**

วิธีทำ

ข้อนี้ ตอนหยิบ 6 ลูก จะแบ่งกรณี เป็นกรณี “ขาว 3 แดง 3” กับ “ขาว 4 แดง 2” ก็ได้
แต่เนื่องจากมีลูกบอลแค่ 7 ลูก ดังนั้น “จำนวนแบบของการเรียง 7 ลูก”
จะเท่ากับ “จำนวนแบบของการเรียง 6 ลูก”
(เพราะตอนเรียง 7 ลูก ลูกสุดท้ายจะเรียงได้แค่แบบเดียว ทำให้ เรียง 6 ลูก หรือ 7ลูก ก็ได้จำนวนวิธีเท่ากัน)
ดังนั้น จะหาจำนวนแบบของการเรียง 7 ลูก มาใช้แทนจำนวนแบบของการเรียง 6 ลูกได้เลย
จะได้จำนวนแบบทั้งหมด $=$ จำนวนแบบการเรียง 7 ลูก

$\longrightarrow$ ใช้สูตรเรียงของซ้ำได้ $= \dfrac{7!}{4!3!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$ แบบ

ก. ใช้หลัก Inclusive $-$ Exclusive โดยรวมแบบที่ต้องการ และหักแบบซ้ำ
จะได้จำนวนแบบที่ต้องการ $=$ จำนวน
แบบที่หัวแถวสีขาว $+$ จำนวนแบบที่ท้ายแถวสีแดง $-$ จำนวนแบบที่หัวแถวสีขาวและท้ายแถวสีแดง
จำนวนแบบที่หัวแถวสีขาว $\longrightarrow$ หัวแถวเลือกได้ 4 แบบ

ที่เหลือได้ $6! \longrightarrow$ ยุบของซ้ำได้ $= \dfrac{4 \cdot 6!}{4!3!} = 20$ แบบ

จำนวนแบบที่ท้ายแถวสีแดง $\longrightarrow$ ท้ายแถวเลือกได้ 3 แบบ

ที่เหลือ ได้ $6! \longrightarrow$ ยุบของซ้ำได้ $= \dfrac{3 \cdot 6!}{4!3!} = 15$ แบบ

จำนวนแบบที่หัวแถวสีขาว และ ท้ายแถวสีแดง $\longrightarrow$ หัวแถวเลือกได้ 4 แบบ ท้ายแถวเลือกได้ 3 แบบ

ที่เหลือ ได้ $5! \longrightarrow$ ยุบของซ้ำได้ $= \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 5!}{4!3!} = 10$ แบบ

จะได้จำนวนแบบที่โจทย์ถาม $= 20 + 15 - 10 = 25$ แบบ

$\longrightarrow$ ความน่าจะเป็น $= \dfrac{25}{35} = \dfrac{5}{7} \longrightarrow$ ก. ผิด

ข. จากข้อ ก. จำนวนแบบที่หัวแถวเป็นสีขาว $= 20$ แบบ
และจำนวนแบบที่ท้ายแถวเป็นสีแดง $= 15$ แบบ
ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หัวแถวเป็นสีขาว จะมากกว่า $\longrightarrow$ ข. ถูก

10. **ตอบ 1**

วิธีทำ จัดรูปไฮเพอร์โบลาได้

$$16y^2 + 32y - 9x^2 + 32x + 124 = 0$$
$$16\left(y^2 + 2y\right) - 9\left(x^2 - 4x\right) = -124$$
$$16\left(y^2 + 2y + 1\right) - 9\left(x^2 - 4x + 4\right) = -124 + 16(1) - 9(4)$$
$$16(y+1)^2 - 9(x-2)^2 = -144$$
$$\frac{16(Y+1)^2}{-144} - \frac{9(X-2)^2}{-144} = 1$$
$$\frac{(X-2)^2}{4^2} - \frac{(Y+1)^2}{3^2} = 1$$

จะได้ ไฮเพอร์โบลาเป็นแบบแนวนอน จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2,-1)$

ระยะโฟกัส $c = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \longrightarrow$ จะได้จุดโฟกัส คือ
$(2 \pm 5, -1) = F_1(7,-1)$ และ $F_2(-3,-1)$

ดังนั้นเส้นตรง L ผ่านจุด $(0,0)$ และ $(2,-1) \longrightarrow$ จะได้สมการ L คือ

เส้นตรงที่ผ่านจุด (a,b) และ (c,d) คือ $\dfrac{y-b}{x-a} = \dfrac{d-b}{c-a}$

$$\frac{y-0}{x-0} = \frac{-1-0}{2-0}$$
$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}$$
$$2y = -x$$
$$2y + x = 0$$

จะได้ผลบวกระยะจาก $F_1(7,-1)$ และ $F_2(-3,-1)$ ไปยังเส้นตรง

$$L = \frac{|2(-1)+7|}{\sqrt{1^2 \ldots}} \quad |2(-1)+-3|$$

> เส้นตรงที่ผ่าน จุด (a,b) ไปยังเส้นตรง
>
> $Ax+By+C=0$ คือ $\dfrac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$$= \frac{5}{\sqrt{5}} \ldots$$

$$= \frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

11. ตอบ 1

วิธีทำ เนื่องจากระยะสั้นสุด คือ ระยะตั้งฉาก จะวาดได้ดังรูป

(a,b) อยู่บนเส้นตรง $2y-x+6=0$

ดังนั้น $2b-a+6=0$

$2b+6=a \quad \ldots(*)$

และจากเส้นตรงที่ตั้งฉากกัน จะมีความชันคูณกันได้ -1

จากสูตรความชั้น $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow$ จะได้ความชันเส้นประ $= \dfrac{b-1}{a-3}$

จัดรูปเส้นตรง $2y-x+6=0$ ในรูป $y=mx+c$

จะได้ $2y=x-6$

$y=\dfrac{x}{2}-3$ จะได้ความชันเส้นตรง $m=\dfrac{1}{2}$

ดังนั้น

$$\frac{b-1}{a-3}\times\frac{1}{2} = -1$$
$$\frac{b-1}{2b+6-3}\times\frac{1}{2} = -1$$
$$\frac{b-1}{2b+3} = -2$$
$$b-1 = -4b-6$$
$$5b = -5$$
$$b = -1$$

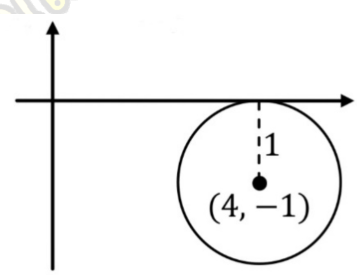
แทน $b=-1$ ใน $(*)$ จะได้ $a=2(-1)+6=4$

จะได้ $(a,b)=(4,-1)$

วงกลมที่มี $(4,-1)$ เป็นจุดศูนย์กลาง และสัมผัสแกน x จะมีรัศมี $=1$ ดังรูป

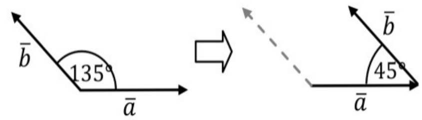
จะได้สมการวงกลม คือ

$$(x-4)^2+(y+1)^2=1^2$$
$$x^2-8x+y^2+2y+1=1$$
$$x^2+y^2-8x+2y+16=0$$



12. **ตอบ 4**

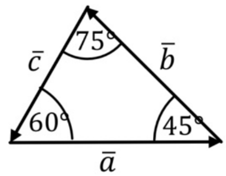
วิธีทำ $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\overline{0}$ แดงว่า เวกเตอร์ต่อกันเป็นรูปสามเหลี่ยม แบบ <u>หัวต่อหาง</u>
แต่มุมที่เวกเตอร์ทำกัน จะวัดแบบ <u>หางต่อหาง</u>
ถ้าจะแปลงเป็นแบบ <u>หัวต่อหาง</u> ต้องเอา 180° ตั้งลบ ดังรูป
แปลงมุมที่โจทย์ให้ จะได้



$$135^\circ \longrightarrow 45^\circ$$

$$105^\circ \longrightarrow 75^\circ$$

$$120^\circ \longrightarrow 60^\circ$$



ดังนั้น จะวาดสามเหลี่ยมได้ดังรูป

โจทย์ให้ $|\overline{a}|=5 \longrightarrow$ ใช้กฎของ sin จะได้ $\dfrac{5}{\sin 75^\circ}=\dfrac{|\overline{b}|}{\sin 60^\circ}=\dfrac{|\overline{c}|}{\sin 45^\circ}$

จับคู่ตัวแรก ไปเท่ากับสองตัวทางขวา จะได้ $|\overline{b}|=\dfrac{5\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}$ และ $|\overline{c}|=\dfrac{5\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
|\overline{b}|+|\overline{c}| &= \frac{5\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}+\frac{5\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} \\
&= \frac{5\left(\sin 60^\circ+\sin 45^\circ\right)}{\sin 75^\circ} \\
&= \frac{5\left(\sin 60^\circ+\sin 45^\circ\right)}{\sin\left(30^\circ+45^\circ\right)} \\
&= \frac{5\left(\sin 60^\circ+\sin 45^\circ\right)}{\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ} \\
&= \frac{5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \\
&= \frac{5\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$$= 5\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2}{1\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)(2)}{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)(2)}{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)(2)\left(\sqrt{2}\right)}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)}{1+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5\sqrt{6}+10}{1+\sqrt{3}}$$

13. **ตอบ 1**

วิธีทำ

จาก $z_1 - z_2 = s$ เป็นจำนวนจริง แสดงว่าส่วนจินตภาพของ z_1 และ z_2 ต้องเท่ากัน ถึงจะหักล้างกันหมด $\longrightarrow b = d$

จาก $z_1^2 - z_2^2 = t$ แทนค่า $z_1 = a, z_2 = c + di$ และ $b = d$ จะได้

$$(a+di)^2 + (c+di)^2 = t$$

$$a^2 + 2adi + d^2i^2 + c^2 + 2cdi + d^2i^2 = t$$

$$a^2 - d^2 + c^2 - d^2 + 2adi + 2cdi = t$$

$$\left(a^2 + c^2 - 2d^2\right) + 2d(a+c)i = t$$

เนื่องจาก t เป็นจำนวนจริง จะสรุปได้ว่าส่วนจินตภาพ $2d(a+c) = 0$

แต่โจทย์ให้ $a, b, c, d \in R - \{0\}$ ดังนั้น $d \neq 0$ จึงสรุปได้ว่า $a + c = 0$ ซึ่งจะได้ $a = -c$

แทน $a = -c$ และ $b = d$ ใน z_1 จะได้ $z_1 = a + bi = -c + di$

ก. $\left|z_1\right| = \sqrt{(-c)^2 + d^2} = \sqrt{c^2 + d^2} = \left|z_2\right| \rightarrow$ ก. ถูก

ข. จะได้

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (-c+di)(c+di) \\ &= -c^2 - cdi + cdi + d^2 i^2 \\ &= -c^2 \quad -d^2 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า i ตัดกันหมด กลายเป็นจำนวนจริง ดังนั้น $\text{Im}(z_1 z_2) = 0$ จริง $\rightarrow$ ข. ถูก

14. **ตอบ 4**

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \tan(a+\theta) &= 5\tan(a-\theta) \\ \frac{\sin(a+\theta)}{\cos(a+\theta)} &= 5\cdot\frac{\sin(a-\theta)}{\cos(a-\theta)} \\ \sin(a+\theta)\cos(a-\theta) &= 5\sin(a-\theta)\cos(a+\theta) \\ 2\sin(a+\theta)\cos(a-\theta) &= 5\left(2\sin(a-\theta)\cos(a+\theta)\right) \\ \sin((a+\theta)+(a-\theta))+\sin((a+\theta)-(a-\theta)) &= 5\left(\sin((a-\theta)+(a+\theta))+\sin((a-\theta)-(a+\theta))\right) \\ \sin(a+\theta+a-\theta)+\sin(a+\theta-a+\theta) &= 5\left(\sin(a-\theta+a+\theta)+\sin(a-\theta-a-\theta)\right) \\ \sin(2a)+\sin(2\theta) &= 5\left(\sin(2a)+\sin(-2\theta)\right) \\ \sin(2a)+\sin(2\theta) &= 5\sin(2a)-5\sin(2\theta) \\ 6\sin(2\theta) &= 4\sin(2a) \\ \frac{\sin(2\theta)}{\sin(2a)} &= \frac{4}{6} \\ \sin(2\theta)(\operatorname{cosec}(2a)) &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

15. **ตอบ 3**

วิธีทำ มีคนเข้าสอบ 160 คน $\longrightarrow$ ให้มีคนสอบผ่าน x คน ดังนั้น จะมีคนสอบไม่ผ่าน $160-x$ คน

จากคนเข้าสอบ 160 คน เป็นชายร้อยละ 55 $\longrightarrow$ คิดเป็นชายที่เข้าสอบ $=\frac{55}{100}\cdot 160=88$ คน

จากคนเข้าสอบผ่าน x คน เป็นชายร้อยละ 70 $\longrightarrow$ คิดเป็นชายที่เข้าสอบผ่าน $=\frac{70}{100}\cdot x=\frac{7x}{10}$ คน

จากคนเข้าสอบไม่ผ่าน $160-x$ คน เป็นชายร้อยละ 40 $\longrightarrow$ คิดเป็นชายที่เข้าสอบไม่ผ่าน

$$=\frac{40}{100}\cdot(160-x)$$

$$=\frac{640-4x}{10} \text{ คน}$$

เนื่องจาก ชายที่เข้าสอบทั้งหมด $=$ ชายที่เข้าสอบผ่าน $+$ ชายที่เข้าสอบไม่ผ่าน จะได้สมการคือ

$$88=\frac{7x}{10}+\frac{640-4x}{10}$$

$$880=7x+640-4x$$

$$240=3x$$

$$80=x$$

ดังนั้น มีคนสอบผ่าน 80 คน โดยจะเป็นชาย $=\frac{7x}{10}=\frac{7(80)}{10}=56$ คน

ดังนั้น จะมีผู้หญิงที่สอบผ่าน $=80-56=24$ คน

16. ตอบ 3

วิธีทำ แทน x ใน $f(x)$ ด้วย $\frac{2x}{1+x^2}$ จะได้

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \log\left(\frac{1+\frac{2x}{1+x^2}}{1-\frac{2x}{1+x^2}}\right)$$

$$= \log\left(\frac{\frac{1+x^2+2x}{1+x^2}}{\frac{1+x^2-2x}{1+x^2}}\right)$$

$$= \log\left(\frac{1+x^2+2x}{1+x^2}\cdot\frac{1+x^2}{1-2x+x^2}\right)$$

$$= \log\left(\frac{1+2x+x^2}{1-2x+x^2}\right)$$

$$= \log\left(\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}\right)$$

$$= \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$$

$$= 2\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

ดังนั้น $\int f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx = \int 2\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx = 2\int \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx = 2A$

17. **ตอบ 4**

วิธีทำ เมื่อ $x \longrightarrow 0$ จะเห็นว่า $5x+1$ เป็นบวก และ $5x-1$ เป็นลบ

จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์ จะได้ $|5x+1| = 5x+1$ และ $|5x-1| = -(5x-1)$

ดังนั้น

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{|5x+1|-|5x-1|}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}\right) = \lim_{x \to 0}\frac{(5x+1)1(-(5x-1))}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{5x+1+5x-1}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{10x}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{10x\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{a}\right)}{x+a-a}$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{10x\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{a}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} 10\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{a}\right)$$

$$= 10\left(\sqrt{0+a}-\sqrt{a}\right)$$

$$= 10\left(2\sqrt{a}\right)$$

$$= 20\sqrt{a}$$

ดังนั้น $20\sqrt{a} = 80$

$\sqrt{a} = 4$

$a = 16$

จะได้ $a + 58 = 16^2 + 16 + 58$

$= 256 + 16 + 58$

$= 330$

Knowledge Academy
สถาบันกวดวิชาที่ให้คุณได้มากกว่าความรู้

18. **ตอบ 1**

วิธีทำ

$$ABA = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{(1)(4)-(2)(3)} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

จาก $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ แทนค่า A จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{(1)(1)-(-1)(0)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

ก. จะได้ $BAB = B(AB) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 22 & 32 \end{bmatrix} \longrightarrow$ ก.ถูก

ข. $(A-B)(A+B) = A^2 + AB + BA - B^2$

$$= A^2 + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - B^2$$

$$= A^2 + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} - B^2$$

$$= A^2 + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} - B^2 \neq A^2 - B^2 \longrightarrow$$ ข. ถูก

19. **ตอบ 4**

วิธีทำ

จะเห็นว่า จุดศูนย์กลาง กับ โฟกัส มีพิกัด y เท่ากัน $(=-1)$

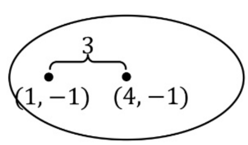
ดังนั้น แกนเอกจะเรียงตัวในแนวนอน $\longrightarrow$ เป็นวงรีแนวนอน

จากจุดศูนย์กลาง $(4,-1)$ จะได้สมการวงรีอยู่ในรูป $\dfrac{(x-4)^2}{a^2} + \dfrac{(y+1)^2}{b^2} = 1$

จากจุดศูนย์กลาง $(4,-1)$ และโฟกัส $(1,-1)$ จะได้ระยะโฟกัส $c = 4-1 = 3$

และจาก $a^2 - b^2 = c^2$ จะได้ $a^2 - b^2 = 3^2 = 9$

$$= 9 + b^2 \quad ...(*)$$



จากวงรีผ่าน $(8,0)$ จะได้

$$\frac{(8-4)^2}{a^2}+\frac{(0+1)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{16}{9+b^2}+\frac{1}{b^2}=1 \qquad \text{แทนค่า } a^2 \text{ จาก } (*)$$

$$\frac{16b^2+9+b^2}{\left(9+b^2\right)b^2}=1$$

$$16b^2+9+b^2=9b^2+b^4$$

$$0=b^4-8b^2-9$$

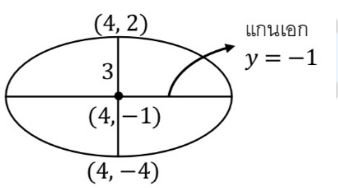
$$0=\left(b^2-9\right)\left(b^2+1\right)$$

$b^2+1>0$ เสมอ จะไม่มีทางเท่ากับ0ได้

$$0=(b-3)(b+3)\left(b^2+1\right)$$

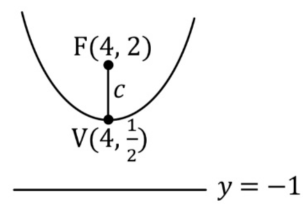
$$b=3,\cancel{-3}$$

b ในสูตรวงรี ต้องเป็นบวก



ดังนั้น จุดปลายแกนโทของวงรีคือ
$(4,-1\pm 3)=(4,2)$ และ $(4,-4)$
เอาจุดปลายของแกนโทในควอดรันต์ 1 จะได้ $(4,2)$
และจะได้ แกนเอก คือ $y=1$

ดังนั้น พาราโบลามีจุดโฟกัส $(4,2)$ และ ไดเรกตริกซ์ คือ $y=1$
จุดยอด จะอยู่ตรงกลางระหว่างโฟกัส กับ ไดเรกตริกซ์



จะได้จุดยอดจุดยอด $V\left(4,\frac{2+(-1)}{2}\right)=\left(4-\frac{1}{2}\right)$ ดังรูป

และจะได้ระยะโฟกัส $c=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

เป็นพาราโบลาแนวตั้ง $\longrightarrow$ $(x-h)^2=4c(y-k)$

$$(x-4)^2=4\left(\frac{3}{2}\right)\left(y,\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2-8x+16=6y-3$$

$$x^2-8x-6y+19=0$$

20. **ตอบ 4**

วิธีทำ จาก

$$\left(f^{-1}\circ g\right)(x) = 4x$$

$$f^{-1}\left(g(x)\right) = 4x$$

$$g(x) = f(4x)$$

$$g(x) = 2(4x)-5$$

$$g(x) = 8x-5$$

และจาก $(g\circ h)(x)$ หารด้วย $x-1$ เหลือเศษ -21

ใช้ทฤษฎีเศษ จะได้

$$(g\circ h)(1) = -21$$

$$g\left(h(1)\right) = -21$$

$$8h(1)-5 = 21$$

$$8h(1) = -16$$

$$h(1) = -2$$

แต่โจทย์กำหนดให้ $h(x-c)=x^3-3x^2-2$

ดังนั้น ถ้า $x-c=1$ แล้วจะได้ $x^3-3x^2-2=-2$

ถ้า $x-c=1$ จะได้ $x=c+1$ แทนใน $x^3-3x^2-2=-2$

จะได้

$$(c+1)^3-1(c+1)^2-2 = -2$$

$$(c+1)^3-3(c+1)^2 = 0$$

$$(c+1)^2(c+1-3) = 0$$

$$(c+1)^2(c-2) = 0$$

จะได้ $c=-1$ หรือ 2 แต่ c เป็นจำนวนเต็มบวก

จะได้ $c=2$ ดังนั้น $h(x-2)=x^3-3x^2-2$ ...(*)

ก. $(f \circ h)(c) = (f \circ h)(2) = f(h(2)) \longrightarrow$ จะหา $h(2)$

จาก (*) ต้องให้ $x - 2 = 2$ จะได้ $x = 4$

แทน $x = 4$ ใน (*) จะได้ $h(4-2) = 4^3 - 3(4^2) - 2$

$$h(2) = 64 - 48 - 2$$
$$h(2) = 14$$
$$= f(14)$$
$$= 2(14) - 5$$

$\longrightarrow$ ก. ถูก

ข. $(h+g)(c) = (h+g)(2) = h(2) + g(2)$

$= 14 + 8(2) - 5 \longrightarrow$ ข. ผิด

21. **ตอบ 2**

วิธีทำ จากสมบัติ

$$A\,\mathrm{adj}A = (\det A)\mathrm{I}$$

ใส่ det ทั้งสองฝั่ง

$$\det(A\mathrm{adj}A) = \det((\det A)\mathrm{I})$$

จากสมบัติ $\det(kA) = k^n \det A$

$$\det(A\mathrm{adj}A) = (\det A)^3 \det \mathrm{I}$$

$\det(\mathrm{I}) = 1$

$$\det(A\mathrm{adj}A) = (\det A)^3$$

แทนในสมการที่โจทย์กำหนด

$$\det(A\mathrm{adj}A) - 2(\det A)^2 - 3\det A = 0$$

ดึง detA เป็นตัวร่วม

$$(\det A)^3 - 2(\det A)^2 - 3\det A = 0$$
$$(\det A)\left(\left(\det A^2\right) - 2\det A - 3\right) = 0$$
$$(\det A)(\det A - 3)(\det A + 1) = 0$$
$$\therefore \det A = 0, 3, -1$$

แต่โจทย์ให้ $\det A > 0 \longrightarrow$ จะได้ $\det A = 3$

และจาก $AB = \mathrm{I}$ จะได้ A และ B เป็นอินเวอร์สการคุณของกันและกัน

ดังนั้น $\det B = \det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A} = \dfrac{1}{3}$

ก. จากสมบัติ $\mathrm{dey}A^t = \det A$ จะได้

$$7\det B - \det A^t = 7\det B - \det A$$
$$= 7\left(\frac{1}{3}\right) - 3$$
$$= \frac{7-9}{3}$$
$$= -\frac{2}{3} < 0 \qquad \longrightarrow \text{ ก. ถูก}$$

ข. จาก $A = B^{-1} = \dfrac{1}{\det B} \cdot \operatorname{adj}B = \dfrac{1}{\frac{1}{3}} \cdot \operatorname{adj}B$

ดังนั้น $\det(2A - 3\operatorname{adj}B) = \det(2A - A) = \det(A) = 3 \longrightarrow$ ข. ผิด

22. **ตอบ 3**

วิธีทำ สมมติให้ปลูกมัน x ไร่ และปลูกสับปะรด y ไร่

$\longrightarrow$ จำนวนไร่ห้ามติดลบ ดังนั้น $x \geq 0, y \geq 0$

$\longrightarrow$ มีที่ดิน150ไร่ ดังนั้น $x + y \leq 150$ ...(1)

$\longrightarrow$ มีทุน 40,000บาท ดังนั้น

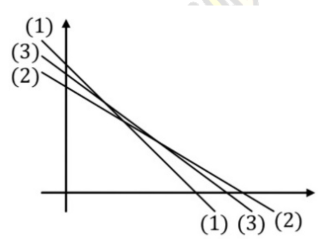
$$200x + 300y \leq 40000$$
$$2x + 3y \leq 400 \quad ...(2)$$

$\longrightarrow$ มีแรงงาน 1,850 ชั่วโมง ดังนั้น

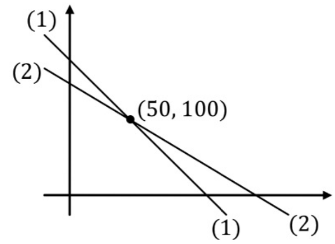
$$10x + 12.5y \leq 1850$$
$$20x25y \leq 3700$$
$$4x + 5y \leq 740 \quad ...(3)$$

วาดกราฟอสมการข้อจำกัดบนแกนเดียวกัน แล้วหาพื้นที่ที่ซ้อนกัน

	ตัดแกนxที่ (แทน $y=0$)	ตัดแกนyที่ (แทน $x=0$)
(1) $x + y = 150$	150	150
(2) $2x + 3y = 400$	200	133.3
(3) $4x + 5y = 740$	185	148



จะเห็นว่า ทั้งสามเส้น ตัดใกล้กันมาก ถ้าวาดเส้นที่ (3) ตรงกลาง คลาดเคลื่อนแค่นิดเดียว จะได้รูปที่ผิดทันที ดังนั้น จะวาดแค่ (1) กับ (2) แล้วหาจุดตัดก่อน



เอา $(2)-2(1)$ จะทำให้ x ตัดกันหมด

เหลือ $3y-2y=400-2(150)$

$$y = 100$$

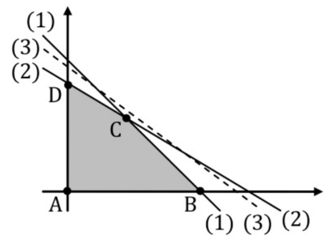
แทน $y=100$ ใน (1) จะได้ $x=50$

ได้จุดตัดคือ $(50,100)$ ดังรูป

แทน $(50,100)$ ในอสมการ (3) จะได้

$$4(50)+5(100) \leq 740$$

$$700 \leq 740$$



จะเห็นว่า $(50,100)$ ทำให้ $4x+5y$ ต่ำกว่า 740

ดังนั้น จึงแน่ใจได้ว่า $(50,100)$ อยู่ต่ำกว่าเส้น (3)

ดังนั้น พื้นที่ที่ซ้อนทับกัน จะไม่มีส่วนที่เกิดจาก (3) เลย ดังรูป

นำจุดมุม A,B,C,D ไปแทนเพื่อหากำไร $1500x+2000y$ จะได้

$A(0,0) \rightarrow 1500(0)+2000(0) = 0$

$B(150,0) \rightarrow 1500(150)+2000(0)=225,000$

$C(50,100) \rightarrow 1500(50)+2000(100)=275,000$

$D(0,133.3) \rightarrow 1500(0)+2000(133.3)=266,666.6$

ดังนั้น ได้กำไรสูงสุด 275,000 บาท ที่จุด C $\longrightarrow$ ปลูกมัน 50 ไร่ สับปะรด 100 ไร่

หมายเหตุ : ข้อนี้จะเอาตัวเลือกแต่ละข้อมาไล่แทน แล้วดูว่าข้อไหนตรงกับเงื่อนไขทั้ง 3 และได้กำไรมากสุด ก็ได้ ที่ต้อง ระวังคือ ข้อ 1. ไม่ได้กำหนด x มา (ปลูกสับปะรดอย่างเดียว แปลว่า $y=0$ แต่ x ไม่รู้) $\longrightarrow$ ต้องหา มากสุดที่ สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้ง 3 เอง

23. **ตอบ 3**

วิธีทำ

หา a :

$$\log_a \sqrt{2} + \log_a \sqrt[4]{2} + \log_a \sqrt[8]{2} + \ldots = \frac{1}{3}$$

$$\log_a 2^{\frac{1}{2}} + \log_a 2^{\frac{1}{4}} + \log_a 2^{\frac{1}{8}} + \ldots = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2}\log_a 2 + \frac{1}{4}\log_a 2 + \frac{1}{8}\log_a 2 + \ldots = \frac{1}{3}$$

$$\left(\log_a 2\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) = \frac{1}{3}$$

อนุกรมเรขาอนันต์ $a_1 = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$

จะได้ $S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

$$\left(\log_a 2\right)(1) = \frac{1}{3}$$

$$\log_a 2 = \frac{1}{3}$$

$$2 = a^{\frac{1}{3}}$$

$$2^3 = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$8 = a$$

หา b :

$$4^{\log b} - 2b^{\log 2} = 8$$

$$\left(2^2\right)^{\log b} - 2b^{\log 2} - 8 = 0$$

จากสมบัติ $\left(a^m\right)^n = \left(a^n\right)^m = a^{mn}$

$$\left(2^{\log b}\right)^2 - 2b^{\log 2} - 8 = 0$$

จากสมบัติ $a^{\log_n b} = b^{\log_n a}$

$$\left(2^{\log b}\right)^2 - 2\left(2^{\log b}\right) - 8 = 0$$

$$\left(2^{\log b} - 4\right)\left(2^{\log b} + 2\right) = 0$$

$2^{\log b} = 4, \cancel{-2}$

ฝั่งซ้าย มีฐานการยกกำลังเป็นบวก $(=2)$ จะได้ผลลัพธ์เป็นบวกเท่านั้น

$2^{\log b} = 2^2$

$\log b = 2$

$b = 10^2 = 100$

log ไม่มีฐาน $=$ log ฐาน

ก. $a+b=8+100=108 \longrightarrow$ ก. ผิด

ข. $a \log b = 8\log 100 = 8(2) = 16 \longrightarrow$ ข. ถูก

24. **ตอบ 1**

วิธีทำ จากสูตรความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเส้นตรง

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} Y_i &= a\sum_{i=1}^{n} X_i + bn \\ \sum_{i=1}^{n} X_iY_i &= a\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} X_i\end{aligned}}$$

จะได้

$45 = a(20) + b(5)$ ...(1)

$220 = a(100) + b(20)$ (2)

แก้ระบบสมการ $(1) \div 5 : 9 = 4a + b$ ...(3)

$(2) \div 20 : 11 = 5a + b$ ...(4)

$(4) - (3)$ จะได้ $2 = a$

แทนใน (3) จะได้ $9 = 4(2) + b$

จะได้ $b = 1$

ก. $a^2 + b^2 + 1^2 = 5 \longrightarrow$ ก. ถูก

ข. จะได้สมการทำนายคือ $y = 2x + 1$

ดังนั้น ถ้า x เป็นจำนวนเต็ม จะทำนายได้ y เป็นจำนวนคี่ $\longrightarrow$ ข. ถูก

25. **ตอบ 3**

วิธีทำ จะได้ $n=60, \bar{x}=40$ และ

$$\frac{s}{\bar{x}} = 0.125$$
$$\frac{s}{40} = 0.125$$
$$s = 5$$

สัมประสิทธิ์การแปรผัน $= \frac{s}{\bar{x}}$

จะได้ความแปรปรวนที่ถูกต้อง $= s^2 = 5^2 = 25$

ดังนั้น

$$\frac{\sum(x_i-40)^2}{60} = 25$$
$$\frac{\sum(x_i^2-80x_i+1600)}{60} = 25$$
$$\frac{\sum x_i^2-80\sum x_i+\sum 1600}{60} = 25$$
$$\frac{\sum x_i^2-80(60)(40)+(60)(1600)}{60} = 25$$
$$\frac{\sum x_i^2}{60}-80(40)+1600 = 25$$
$$\frac{\sum x_i^2}{60} = 1625 \quad ...(*)$$

จาก $\frac{\sum x_i}{n}=\bar{x}$ จะได้
$$\sum x_i = (n)(\bar{x}) = (60)(40)$$

จาก $\sum c = nc$ จะได้
$$\sum 1600 = n(1600) = (60)(1600)$$

แต่นาย ก. คำนวณค่าเฉลี่ยผิดไป $\longrightarrow$ สมมติให้ นาย ก. คำนวณค่าเฉลี่ยได้ $=a$

โดย นาย ก. ใช้ $\bar{x}=a$ ได้ความแปรปรวน $=34$ แสดงว่า

$$\frac{\sum(x_i-a)^2}{60} = 34$$

$$\frac{\sum\left(x_i^2-2ax_i+a^2\right)}{60} = 34$$

$$\frac{\sum x_i^2-2a\sum x_i+\sum a^2}{60} = 34$$

$$\frac{\sum x_i^2-2a(60)(40)+(60)a^2}{60} = 34$$

$\sum x_i$ ที่เกิดจากการกระจาย $\sum(X_i-a)^2$ จะยังเท่ากับ $\sum x_i$ ที่ถูกต้อง $=(60)(40)$

จาก $\sum c = nc$ จะได้ $\sum a^2 = na^2 = 60a^2$

$$\frac{\sum x_i^2}{60}-2a(40)+a^2 = 34$$

จาก (*)

$$1625-800a+a^2 = 34$$

$$a^2-80a+1591 = 0$$

$$(a-37)(a-43) = 0$$

$$a = 37,43$$

แต่โจทย์ให้นาย ก. คำนวณได้ $a<40$ ดังนั้น จะได้ $a=37$

<u>หมายเหตุ</u>: ข้อนี้ต้องสมมติให้ นาย ก. คำนวณความแปรปรวนด้วยสูตร $\dfrac{\sum(X_i-\overline{X})^2}{n}$ เท่านั้น

ถ้า นาย ก. ใช้สูตร $\dfrac{\sum x_i^2}{n}-\overline{x}^2$ จะได้คำตอบที่ไม่ตรงกับ ตัวเลือกไหนเลย

Knowledge Academy สถาบันกวดวิชาที่ให้คุณได้มากกว่าความรู้

26. **ตอบ 2**

วิธีทำ

จาก (3) จะได้ $a = 9, 10, 11, \ldots$

แต่จาก (1) ถ้า a เป็น 10 ขึ้นไป ฝั่งซ้ายที่เป็น $a^2 + b^2$ จะมีค่าเกิน 90 และ (1) จะไม่จริง

ดังนั้น $a = 9$ เท่านั้น

แทน $a = 9$ ใน (1)และ(2) จะได้

$$81 + b^2 \leq 90 \qquad\qquad 9 + b = 5 + c$$

และ

$$b^2 \leq 90 \quad \ldots(*) \qquad\qquad 4 + b = c \quad \ldots(**)$$

จาก (*) จะได้ $b = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

แทน b แต่ละค่าใน(**) จะได้

$(b, c) = (-3, 1), (-2, 2), (-1, 3), (0, 4), (1, 5), (2, 6), (3, 7)$

(ก) $a + 2b + 3c$ จะมากที่สุด เมื่อ $(b, c) = (3, 7)$

ดังนั้น $a + 2b + 3c \leq 9 + 2(3) + 3(7) = 36 \longrightarrow$ ก.ถูก

(ข) $a^3 + b^3 + c^3$ จะมากที่สุด เมื่อ $(b, c) = (3, 7)$ เช่นกัน

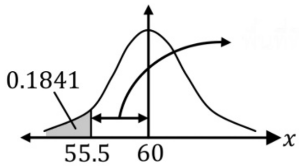
จะได้ค่ามากที่สุดของ $a^3 + b^3 + c^3$ คือ

$9^3 + 3^3 + 7^3 = 729 + 27 + 343 = 1099 \longrightarrow$ ข.ผิด

27 **ตอบ 1**

วิธีทำ แจกแจงแบบปกติ จะได้ $\bar{x}=$ มัธยฐาน $=$ ฐานนิยม $\longrightarrow$ โจทย์ให้ มัธยฐาน $=60$

จะได้ $\bar{x}=60$ ด้วย $\longrightarrow$ น้อยกว่า 55.5 คะแนน มี 18.41% จะวาดได้ดังรูป



พื้นที่ที่ใช้เปิดตาราง = พื้นที่ที่วัดจากแกนกลาง

= พื้นที่ครึ่งซ้าย – พื้นที่ที่แรเงา

$=0.5-0.1841=0.3159$

เอาพื้นที่0.3159ไปเปิดตาราง จะได้ $z=0.9 \longrightarrow$ แต่ $x=55.5$ อยู่ครึ่งซ้าย

จะมี z ติดลบ $\longrightarrow z=-0.9$

แทน $x=55.5$, $z=-0.9$, $\bar{x}=60$ ในสูตร $z_i=\dfrac{x_i-\bar{x}}{s}$ จะได้

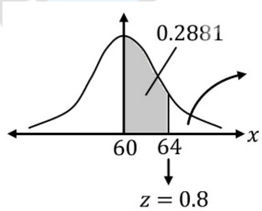
$$-0.9=\frac{55.5-60}{s}$$

$$s=\frac{-4.5}{-0.9}=5$$

หาจำนวนนักเรียนที่ได้สูงกว่า 64 คะแนน $\longrightarrow$ แปลง $x=64$ เป็นค่า z

โดยใช้สูตร $z_i=\dfrac{x_i-\bar{x}}{s}$

จะได้ $z_i=\dfrac{64-60}{5}=0.8 \longrightarrow$ เปิดตารางได้พื้นที่ $=0.2881$ จะวาดได้ดังรูป



มากกว่า64จะมี $=$ พื้นที่ครึ่งขวา – พื้นที่แรเงา

$=0.5-0.2881$

$=0.2119$

$=21.19\%$

28 **ตอบ 2**

วิธีทำ

3 คนแรก มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต $=45$ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $=0$

$\longrightarrow$ แสดงว่าทั้ง 3 คนได้คะแนนเท่ากัน $=45$

2 คนหลัง มีอัตราส่วนคะแนน $=2:3 \longrightarrow$ ให้ทั้งสองคนได้คะแนน $2x$ และ $3x$ ตามลำดับ

โจทย์ให้ $\overline{X}$ ทั้ง 5 คน $=50$ $\longrightarrow \dfrac{45+45+45+2x+3x}{5}=50$

$$135+5x=250$$
$$5x=115$$
$$x=23$$

จะได้คะแนนของสองคนหลัง $=2(23)$ และ $3(23)=46$ และ 69

ดังนั้น ความแปรปรวน

$$=\frac{\sum(x_i\overline{x})^2}{N}$$

$$=\frac{(45-50)^2+(45-50)^2+(45-50)^2+(46-50)^2+(69-50)^2}{5}$$

$$=\frac{25+25+25+16+361}{5}$$

$$=\frac{452}{5}=90.4$$

29. **ตอบ 4**

วิธีทำ จะได้ z เป็นรากที่ 3 ของ i

หากรากที่ 3 ของ i $\longrightarrow$ แปลง i เป็นรูปเชิงขั้ว จากรูป จะได้ $i = 1\ \text{cis}\ 90^\circ$

จะได้รากตัวแรกคือ $\sqrt[3]{1}\text{cis}\dfrac{90^\circ}{3} = 1\ \text{cis}30^\circ$

รากอีกสองตัว จะได้จากการเพิ่มมุม รากละ $\dfrac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

$\longrightarrow$ ที่เหลือคือ $1\ \text{cis}\ 150^\circ$ และ $1\ \text{cis}\ 270^\circ$

เนื่องจาก z ต้องมี $ab > 0 \longrightarrow$ ดังนั้น a,b ต้องเป็นบวกทั้งคู่ หรือ ลบทั้งคู่

$\longrightarrow$ จะได้ z อยู่ใน Q_1 หรือ Q_2 จะเห็นว่า ในรากทั้งสามตัว

$1\ \text{cis}\ 30^\circ, 1\ \text{cis}\ 150^\circ, 1\ \text{cis}\ 270^\circ$

จะมี $1\ \text{cis}\ 30^\circ$ เท่านั้น ที่อยู่ใน Q_1 สอดคล้องกับ เงื่อนไข

$\longrightarrow$ ดังนั้น $z = 1\ \text{cis}\ 30^\circ$

จะได้

$$\begin{aligned}
\left|iz^5+2\right|^2 &= \left|i\left(1\text{cis}\,30^\circ\right)^5+2\right|^2 \\
&= \left|i\left(1^5\,\text{cis}5\left(30^\circ\right)\right)+2\right|^2 \\
&= \left|i\left(1\text{cis}150^\circ\right)+2\right|^2 \\
&= \left|i\left(\cos150^\circ+i\sin150^\circ\right)+2\right|^2 \\
&= \left|i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)+2\right|^2 \\
&= \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}+2\right|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{2}\right|^2 \\
&= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
&= \frac{3}{4}+\frac{9}{4} \\
&= \frac{12}{4} \\
&= 3
\end{aligned}$$

30. **ตอบ**

วิธีทำ

จัดรูปสมการได้

$$a^2+b^2+9 = 4a-2b+4$$

$$a^2-4a+b^2+5 = 0$$

$$a^2-4a+4+b^2+2b+1 = 0$$

$$(a-2)^2+(b+1)^2 = 0$$

แยก 5 เป็น $4+1$ ไปเติมเป็น ล^2
ให้เข้า สูตร น^2 + 2นล + ล^2 = (น + ล)^2

เนื่องจาก $(a-2)^2 \geq 0$ และ $(b+1)^2 \geq 0$

ดังนั้น ถ้าสองตัวนี้บวกกันเป็น 0 แสดงว่า ต้องเป็น 0 ทั้ง 2 ตัว

จะได้ $a=2$ และ $b=-1$

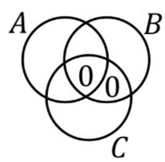
(ก) แทนค่า a และ b จะได้ $2<-1 \longrightarrow$ (ก) ผิด

(ข) แทนค่า a และ b จะได้ $\left(2(2)-(-1)\right)^n = \left(2+3(-1)^n\right)$

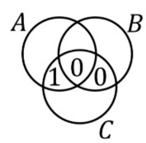
$$(5)^n = (5)^n \longrightarrow \text{(ข) ผิด}$$

31. **ตอบ 8**

วิธีทำ เอาข้อมูลที่วาดรูปได้ มาใส่ในแผนภาพก่อน
จาก $B \cap C = \varnothing$ จะได้ดังรูป

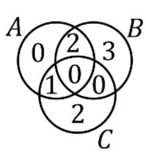


จาก $P(A \cap C)$ มี 2 ตัว $=2^1$
จะได้ $A \cap C$ มีสมาชิก 1 ตัว



จำนวนสมาชิกของ $P(A) = 2^{n(A)}$

จาก $P(C-A)$ มี 4 ตัว $=2^2$
จะได้ $C-A$ มีสมาชิก 2 ตัว



จาก $P(D) = \{\varnothing, \{1\}, D, E\}$ มีสมาชิก 4 ตัว $=2^2 \longrightarrow$ ดังนั้น D มีสมาชิก 2 ตัว

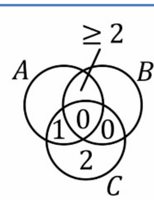
เนื่องจาก E เป็นส่วนหนึ่งในสมาชิกของ $P(D)$ จากสมบัติของเพาเวอร์เซต จะได้ $E \subset D$

โจทย์กำหนด $D \cup E \subset A \cap B$

$$D \subset A \cap B$$

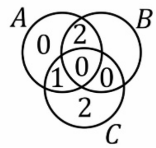
จาก $E \subset D$ ดังนั้น $D \cup E = D$

เนื่องจาก D มีสมาชิก 2 ตัว และ $D \subset A \cap B$
ดังนั้น $A \cap B$ จะมีสมาชิก ≥ 2 ตัว



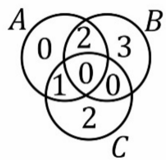
จาก $P(A)$ มี 8 ตัว $= 2^3$ $\longrightarrow$ จะได้ A มีสมาชิก 3 ตัว

แต่จากแผยภาพ จะเห็นว่าวง A มี 1 กับ ≥ 2 ซึ่งครบ 3 แล้ว ดังนั้น



สุดท้าย จาก $P(B)$ มี 32 ตัว $= 2^5$

จะได้ B มีสมาชิก 5 ตัว $\longrightarrow$ หักกับ 2 ที่มีอยู่แล้วในวง B จะเหลือ 3



ดังนั้น $A \cup B \cup C$ มีสามาชิก $= 0 + 2 + 3 + 1 + 0 + 0 + 2 = 8$ ตัว

32. **ตอบ 181**

วิธีทำ เราสามารถจับคู่มุมที่รวมกันเป็น 90° เพื่อเข้าสูตรโคฟังก์ชัน แล้วเข้าสูตร $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ได้ดังนี้

$$\sin 20^\circ + \sin 290^\circ = \sin 20^\circ + \cos 20^\circ = 1$$
$$\sin 210^\circ + \sin 280^\circ = \sin 210^\circ + \cos 210^\circ = 1$$
$$\sin 220^\circ + \sin 270^\circ = \sin 220^\circ + \cos 220^\circ = 1$$
$$\sin 230^\circ + \sin 260^\circ = \sin 230^\circ + \cos 230^\circ = 1$$
$$\sin 240^\circ + \sin 250^\circ = \sin 240^\circ + \cos 240^\circ = 1$$

มุมรวมกันได้ $90^\circ \longrightarrow \sin = \cos$

ส่วนมุมที่เกิน 90° ต้องทำให้น้อยกว่า 90° ก่อน แล้วค่อยจับคู่ให้ได้1 แบบเดิม

ทำมุมกันได้ 180°
$\longrightarrow$ sin จะเท่ากัน

$$\sin^2 100^\circ + \sin^2 110^\circ + \sin^2 120^\circ + \sin^2 130^\circ + \sin^2 140^\circ + \sin^2 150^\circ + \sin^2 160^\circ + \sin^2 170^\circ + \sin^2 180^\circ$$

$$\sin^2 80^\circ + \sin^2 70^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 50^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 10^\circ + 0$$

รวมตัวเศษ จะจับคู่ 1 ได้ทั้งหมด 9 คู่ $\longrightarrow$ จะได้ เศษ $= 9$

สำหรับตัวส่วน จะใช้วิธีจับคู่เหมือนเดิมก็ได้ แต่ถ้าสังเกตดีๆ จะเห็นว่า ถ้านำเศษ กับ ส่วน

มารวมกัน จะจับคู่ เข้าสูตร $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ได้ทั้งหมด 19 คู่

(0, 1, 2, ... , 18 มี 19 ตัว) ดังนั้น เศษ $+$ ส่วน $= 19$ แต่เศษ $= 9$

ดังนั้น ส่วน $= 19 - 9 = 10$ จะได้ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{9}{10}$ ดังนั้น $a^2 + b^2 = 9^2 + 10^2 = 181$

33. **ตอบ 4.5**

วิธีทำ แทนค่า m, n จะได้

$$\log_{\sqrt{3x+4}}\sqrt{4x^2+4x+1}+\log_{2x+1}\left(6x^2+11x+4\right)=4$$

$$\log_{\sqrt{3x+4}}\sqrt{(2x+1)^2}+\log_{2x+1}(3x+4)(2x+1)=4$$

$$\log_{(3x+4)^{\frac{1}{2}}}(2x+1)+\log_{2x+1}(3x+4)+\log_{2x+1}(2x+1)=4$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_{3x+4}(2x+1)+\log_{2x+1}(3x+4)-3=4$$

$$2\log_{3x+4}(2x+1)+\log_{2x+1}(3x+4)-3=0$$

เนื่องจาก $\log_{3x+4}(2x+1)$ กับ $\log_{2x+1}(3x+4)$ เป็นส่วนกลับกัน

ดังนั้น ถ้าเปลี่ยนตัวแปร ให้ $\log_{2x+1}(3x+4)=k$ จะได้อีกตัว $=\frac{1}{k}$

(จะสมมติให้ $\log_{3x+4}(2x+1)$ เป็น k ก็ได้ แต่ $\log_{3x+4}(2x+1)$ อยู่ในรูป $\log_{มาก}$ น้อย จะได้ k เป็นเศษส่วน) จะเปลี่ยนตัวแปรเป็น k ได้เป็น

$$\frac{2}{k}+k-3=0$$

$$2+k^2-3k=0$$

$$k^2-3k+2=0$$

$$(k-1)(k-2)=0$$

$$k=1,2$$

ที่ $k=1$

$$\log_{2x+1}(3x+4)=1$$

$$3x+4=(2x+1)^1$$

$$3x+4=2x+1$$

$$x=-3$$

ที่ $k=2$

$$\log_{2x+1}(3x+4)=2$$

$$3x+4=(2x+1)^2$$

$$3x+4=4x^2+4x+1$$

$$0=4x^2+x-3$$

$$0=(4x-3)(x+1)$$

$$x=\frac{3}{4},-1$$

แต่ x เป็น -3 กับ -1 ไม่ได้ เพราะจะทำให้ $2x+1$ ที่เป็นฐาน log ติดลบ

จะได้ A มีสมาชิกตัวเดียว คือ $\frac{3}{4}\longrightarrow$ ดังนั้น B มีสมาชิกตัวเดียว คือ $8\left(\frac{3}{4}\right)^2=4.5$

34. **ตอบ 16**

วิธีทำ จะหาค่าเฉลี่ยของข้อมูลทั้ง 9 ตัว ต้องหา

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+y_1+y_2+y_3+y_4+y_5}{9}$$

เนื่องจากสิ่งที่โจทย์ถาม ไม่ขึ้นกับลำดับของ x และ y ดังนั้น โดยไม่เสียนัยตัวไป เราสามารถสมมติให้ข้อมูลทั้งสองชุด เรียงลำดับจากน้อยไปมากเรียบร้อยแล้ว (ถ้าข้อมูลยังไม่เรียง ก็ให้เรียงแล้วเปลี่ยนชื่อตัวแปร)

ชุดแรก โจทย์ให้ มัธยฐาน $=15\longrightarrow$ มัธยฐานจะอยู่ตรงกลางระหว่างตัวที่ 2 กับ ตัวที่ 3

ดังนั้น $\frac{x_2+x_3}{2}=15$

$$x_2+x_3=30\ ...(1)$$

Q_1 จะอยู่ตัวที่ $\frac{(1)(N+1)}{4}=\frac{(1)(4+1)}{4}=$ ตัวที่ 1.25

$=$ ตัวที่ $1+(0.25)\big($ตัวที่ $2-$ ตัวที่ $1\big)$

$$=x_1+(0.25)(x_2-x_1)$$

$$=x_1+0.25x_2-0.25x_1$$

$$=0.75x_1+0.25x_2$$

Q_3 จะอยู่ตัวที่ $\frac{(3)(4+1)}{4}$ = ตัวที่ 3.75

= ตัวที่ $3+(0.75)($ตัวที่ $4-$ ตัวที่ $3)$

$= x_3+(0.75)(x_4-x_3)$

$= x_3+0.75x_4-0.75x_3$

$= 0.25x_3+0.75x_4$

โจทย์ให้ค่าเฉลี่ย Q_1 และ $Q_3 = 18$

$\longrightarrow$ จะได้ $\frac{Q_1+Q_3}{2} = \frac{0.75x_1+0.25x_2+0.25x_3+0.75x_4}{2} = 18$

$0.750(x_1+x_2)+.25(x_2+x_3) = 36$

$0.75(x_1+x_2)+0.25(30) = 36$

$0.75(x_1+x_2)+7.5 = 36$

$0.75(x_1+x_2) = 28.5$

$x_1+x_2 = \frac{28.5}{0.75} = 38 \quad ...(2)$

ชุดที่สอง มีมัธยฐาน = 15 $\longrightarrow$ จะได้ตัวตรงกลาง คือ $y_3 = 15 ...(3)$

Q_3 จะอยู่ตัวที่ $\frac{(3)(5+1)}{4}$ = ตัวที่4.5

= ตัวที่ $4(0.75)($ตัวที่ $5-$ ตัวที่ $4)$

$= y_4+(0.5)(y_5-y_4)$

$= y_4+0.5y_5-0.5y_4$

$= 0.5y_4+0.5y_5$

โจทย์ให้ $Q_3 = 18.5$ ดังนั้น $0.5y_4+0.5y_5 = 18.5 \longrightarrow$ คูณ 2

ตลอดจะได้ $y_4+y_5 = 37...(4)$

โจทย์ให้ฐานนิยม = 12 ดังนั้น ต้องมีข้อมูล อย่างน้อยสองตัวเท่ากับ 12

แต่จาก (3) จะได้ $y_3 = 15$ ซึ่งมากกว่า 12 ดังนั้น ถ้าจะมีอย่างน้อยสองตัวเท่ากับ 12 แล้ว

สองตัวนั้นต้องเป็น y_1 กับ $y_2 \longrightarrow$ จะได้ $y_1 = y_2 = 12 ...(5)$

จาก(1),(2),(3),(4),(5)จะได้

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{9}$$

$$= \frac{(x_1 + x_4) + (x_2 + x_3) + y_1 + y_2 + y_3 + (y_4 + y_5)}{9}$$

$$= \frac{38 + 30 + 12 + 12 + 15 + 37}{9}$$

$$= \frac{144}{9} \qquad = 16$$

35. **ตอบ 35**

วิธีทำ จากนิยามของอนุพันธ์ จะได้

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(h) + 3x^2h + 3xh^2 - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) + 3x^2h + 3xh^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} + \left(\lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh \right)$$

จาก $\lim_{h \to 0} \frac{f(x)}{x} = 2$

$$= 2 + 3x^2 + 0 \qquad = 3x^2 + 2$$

ดังนั้น $f'(x) = 3x^2 + 2 \rightarrow f'(1) = 3(1^2) + 2 = 5$

ดิฟได้ $f''(x) = 6x \rightarrow f''(5) = 6(5) = 30$

$\rightarrow f'(1) + f''(5) = 5 + 30 = 35$

36. **ตอบ 0**

วิธีทำ

ข้อนี้เงื่อนไขจะต้องเป็นจริง ไม่ว่า a กับ b จะเป็นสมาชิกตัวไหนใน A ก็ตาม
ซึ่งจะเห็นว่า เป็นไปไม่ได้ เพราะกรณีที่ a เป็นตัวน้อย และ b เป็นตัวมาก
(หรือกรณีที่ a กับ b เป็นตัวเดียวกัน) จะทำให้เงื่อนไข $a-b>1$ เป็นเท็จเสมอ
เช่น กรณี $A=\{4,7\}$ จะเห็นว่า ถ้า $a=4,b=7$ จะท ำให้ $4-7>1$ เป็นเท็จ
(หรือกรณีที่ $a=4,b=4$ ก็ทำ ให้ $4-4>1$ เป็นเท็จ) เมื่อมี a,b บางแบบที่ไม่สอดคล้อง
จะทำให้ A ผิดเงื่อนไขทันที (ถึงแม้ว่า $7-4$ มากกว่า 1 ก็ตาม) เพราะเงื่อนไขต้องจริง
สำหรับทุกๆ a กับ b ใน A
ดังนั้น จะไม่มี A แบบไหนเลย ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดได้
ดังนั้น จำนวนแบบของ A จึงเท่ากับ 0

อย่างไรก็ตาม ถ้าโจทย์ข้อนี้เปลี่ยนเงื่อนไข เป็นคิดเฉพาะ “ทุกสมาชิก a และ b ใน A
ที่ $a>b$” จะเป็นโจทย์ที่น่าสนใจ
เนื่องจาก $a>b-1$ แสดงว่า ห้ามมีสมาชิกสองตัวไหนอยู่ติดกัน
$\longrightarrow$ จะแบ่งกรณีนับ ตามขนาดของ A

กรณี A มีสมาชิก 2 ตัว : คำตอบ จะเท่ากับ จำนวนแบบที่
“เลือกเก้าอี้ 2 ตัว จาก 7 ตัว โดยห้ามเลือกเก้าอี้ที่อยู่ติดกัน”
ซึ่งทำได้โดย เอาเก้าอี้ 1 ตัวไปซ่อน แล้วเลือกเก้าอี้ 2 ตัว จาก 6 ตัวที่เหลือ
(เลือกได้ $\binom{6}{2}$ แบบ) แล้วค่อยเอาเก้าอี้ที่ ซ่อนไว้ไปคั่น
(ตรงไหนก็ได้ระหว่างเก้าอี้ 2 ตัวที่เลือก)จะรับประกันได้ว่า เก้าอี้2 ตัวที่เลือก
ไม่อยู่ติดกัน $\longrightarrow$ เลือกได้ $\binom{6}{2}=\frac{6\cdot 5}{2}=15$ แบบ

กรณี A มีสมาชิก 3 ตัว : คำตอบ จะเท่ากับ จำนวนแบบที่ “เลือกเก้าอี้ 3 ตัว จาก 7 ตัว
โดยห้ามเลือกเก้าอี้ที่อยู่ติดกัน” ซึ่งทำได้โดย เอาเก้าอี้ 2 ตัวไปซ่อน แล้วเลือกเก้าอี้
3 ตัว จาก 5 ตัวที่เหลือ (เลือกได้ $\binom{5}{3}$ แบบ) แล้วค่อยเอาเก้าอี้2 ตัวที่ซ่อนไว้ไปคั่น
(ระหว่างตัวแรกที่เลือกกับตัวที่สองที่เลือก กับ ระหว่างตัวที่สองที่เลือกกับตัวที่สามที่
เลือก) จะ รับประกันได้ว่า เก้าอี้ทั้ง 3 ตัวที่เลือก ไม่อยู่ติดกัน
$\longrightarrow$ เลือกได้ $\binom{5}{3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1}=10$ แบบ

กรณี A มีสมาชิก 4 ตัว: คำตอบ จะเท่ากับ จำนวนแบบที่ “เลือกเก้าอี้ 4 ตัว จาก 7 ตัว
โดยห้ามเลือกเก้าอี้ที่อยู่ติดกัน” จะเขียนนับเอาเลยก็ได้ (ได้แบบเดียว

คือ 1, 3, 5, 7) หรือจะทำแบบเดิมก็ได้ คือ เอาเก้าอี้ 3 ตัวไปซ่อน แล้วเลือก
เก้าอี้ 4 ตัว จาก 4 ตัวที่เหลือ (เลือกได้ $\binom{4}{4}=1$ แบบ) แล้วค่อยเอาเก้าอี้3 ตัว
ที่ซ่อนไว้ไปคั่น $\longrightarrow$ ได้ 1 แบบ

จะเห็นว่า ถ้า A มีสมาชิกมากกว่านี้ จะทำไม่ได้แล้ว
รวมทุกกรณี จะได้จำนวนแบบ $=15+10+1=26$ แบบ

37. **ตอบ 4**

วิธีทำ เปลี่ยนตัวแปรให้ $m=2^{2x}$ และให้ $n=\log_2 y$

จัดรูปสมการ จะได้

$$2^{2x}\log_{\frac{1}{4}} y = 1+2^{4x-1}$$

$$2^{2x}\log_{2^{-2}} y = 1+\frac{2^{4x}}{2}$$

$$2^{2x}\left(\frac{1}{-2}\log_2 y\right) = 1+\frac{\left(2^{2x}\right)^2}{2}$$

$$m\left(-\frac{1}{2}n\right) = 1+\frac{m^2}{2}$$

คูณตลอดด้วย $-\frac{2}{m}$

$$n = -\frac{2}{m}-m \quad ...(*)$$

และ

$$9\left(2^{2x}\right)\log_{\frac{1}{8}} y = 9+\log^2_{\frac{1}{2}} y$$

$$9\left(2^{2x}\right)\log_{2^{-3}} y = 9+\left(\log_{2^{-1}} y\right)^2$$

$$9\left(2^{2x}\right)\left(\frac{1}{-3}\log_2 y\right) = 9+\left(\frac{1}{-1}\log_2 y\right)^2$$

$$-3m \quad n = 9+(-n)^2$$

$$-3m\left(-\frac{2}{m}-m\right) = 9+\left(\frac{2}{m}-m\right)^2$$

$$6+3m^2 = 9+\frac{4}{m^2}+4+m^2$$

$$2m^2-7-\frac{4}{m^2} = 0$$

$$2m^4-7^2-4 = 0$$

$$\left(2m^2+1\right)(m-2)(m+2)=0$$

$2m^2+1$ เป็นบวกเสมอ จะไม่มีทางเป็น0

$$m=2,-2$$

แต่ $m=2^{2x}$ เป็นบวกเสมอ ดังนั้น $m=2$ ได้ค่าเดียว จะได้

$$2^{2x}=2$$

$$2x=1$$

$$x=\frac{1}{2}$$

แทนค่า $m=2$ ใน(*) จะได้ $n=-\frac{2}{2}-2=-3$

ดังนั้น $\log_2 y=-3$

$$y=2^{-3}=\frac{1}{8}$$

จะได้ $\frac{x}{y}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}\times\frac{8}{1}=4 \longrightarrow$ B มีสามาชิกตัวเดียวคือ 4

ดังนั้น สมาชิกน้อยสุด $=4$

Knowledge Academy
สถาบันกวดวิชาที่ให้คุณได้มากกว่าความรู้

38. **ตอบ 3.97**

วิธีทำ

ลำดับเลขคณิต จะสามารถใช้สูตร $s_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$ ได้

ให้ผลต่างร่วมของล าดับทั้งสอง คือ d_a และ d_b จะได้

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \frac{\frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d_a\right)}{\frac{n}{2}\left(2b_1 + (n-1)d_b\right)} = \frac{2a_1 + (n-1)d_a}{2b_1 + (n-1)d_b}$$

แต่โจทย์ให้ $\dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \dfrac{n+1}{2n-1}$

ดังนั้น $\dfrac{2a_1 + (n-1)d_a}{2b_1 + (n-1)d_b} = \dfrac{n+1}{2n-1} \quad \dots(1)$

โจทย์ถามค่าของ $\dfrac{2b_{100}}{a_{100}} \longrightarrow$ จากสูตรลำดับเลขคณิต $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้
$$\frac{2b_{100}}{a_{100}} = \frac{2\left(b_1 + (100-1)d_b\right)}{a_1 + (100-1)d_a}$$
$$= \frac{2\left(b_1 + 198d_b\right)}{a_1 + 99d_a} \quad \dots(2)$$

จะเห็นว่าจาก (1) ถ้าแทน $n = 199$ จะได้ตัวส่วนฝั่งซ้าย $2b_1 + 198d_b$ เหมือนตัวเศษของสิ่งที่โจทย์ถามใน (2) $\longrightarrow$ แทน $n = 199$ ใน (1) จะได้

$$\frac{2a_1 + (199-1)d_a}{2b_1 + (199-1)d_b} = \frac{199+1}{2(199)-1}$$

$$\frac{2a_1 + 198d_a}{2b_1 + 198d_b} = \frac{200}{397}$$

กลับเศษกลับส่วน จัดรูปให้เหมือนสิ่งที่โจทย์ถามใน (2)

$$\frac{2b_1 + 198d_a}{2a_1 + 198d_b} = \frac{397}{200}$$

$$\frac{2b_1 + 198d_a}{2\left(a_1 + 99d_b\right)} = \frac{397}{200}$$

$$\frac{2b_1 + 198d_a}{a_1 + 99d_b} = \frac{397}{100} = 3.97$$

39. **ตอบ 112**

วิธีทำ เปลี่ยนตัวแปร ให้ $A=\sqrt{x-1}$ และ $B=\sqrt{2-x}$ $\longrightarrow$ จะเปลี่ยนที่ส่วนที่เหลือในสมการให้อยู่ในรูป A กับ B ลองนำ A และ B มาทดเล่นๆดู จะพบว่า

$$A^2=x-1 \qquad ...(1)$$

$$B^2=2-x \qquad ...(2)$$

$$A^2+B^2=x-1+2-x=1 \qquad ...(3)$$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x-1)(2-x)} \\ &= \sqrt{2x-x^2-2+x} \\ &= \sqrt{3x-x^2-2} \qquad ...(4) \end{aligned}$$

จัดรูปสมการ ให้อยู่ในรูป A กับ B โดยใช้ (1), (2), (3), (4) ดังนี้

$$x=3\sqrt{3x-2-x^2}=3+2\sqrt{x-1}-2\sqrt{2-x}$$

(4)

$$3AB = 1+2-x+2A-2B$$

(3) (2)

$$\begin{aligned} 3AB &= A^2+B^2+B^2+2A-2B \\ 0 &= A^2+3AB+2B^2+2A-2B \\ 0 &= (A-B)(A-2B)+2(A-B) \\ 0 &= (A-B)(A-2B+2) \end{aligned}$$

ดึงตัวร่วม A-B

$$\begin{aligned} A &= B \\ \sqrt{x-1} &= \sqrt{2-x} \\ x-1 &= 2-x \\ 2x &= 3 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

ตรวจคำตอบกับสมการก่อนยกกำลังสอง

$$\sqrt{\frac{3}{2}-1}=\sqrt{2-\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}} \longrightarrow \text{จริง}$$

$A-2B+2 \quad = 0$

$A+2 \quad = 2B$

$\sqrt{x-1}+2 \quad = 2\sqrt{2-x}$

$\left(\sqrt{x+1}+2\right)^2 \quad = \left(2\sqrt{2-x}\right)$

$x-1+4\sqrt{x-1}+4 = 4(2-x)$

$x+3+4\sqrt{x-1} \quad = 8-4x$

$5x-5+4\sqrt{x-1} \quad = 0$

$5(x-1)+4\sqrt{x-1} \quad = 0$

$5\sqrt{(x-1)^2}+4\sqrt{x-1} = 0$

$\sqrt{x-1}\cdot\left(5\sqrt{x-1}+4\right) = 0$

แต่ $5\underbrace{\sqrt{x-1}}_{\geq 0}+4$ เป็นบวกเสมอ

ดังนั้น $\sqrt{x-1} = 0$

$x \quad = 0$

ตรวจคำตอบกับสมการก่อนยกกำลังสอง

$\sqrt{1-1}+2 = 2\sqrt{2-1}$

$2 \quad = 2 \quad \longrightarrow$ จริง

จะได้คำตอบคือ $\frac{3}{2}$ และ 1 ดังนั้น $a =$ ตัวมาก $= \frac{3}{2}$ และ $b =$ ตัวน้อย $= 1$

ดังนั้น $25b+58a \quad = \quad 25(1)+58\cdot\frac{3}{2} \quad = \quad 25+87 \quad = \quad 112$

40. **ตอบ 132**

วิธีทำ

$f'(x) = \frac{2x^4-x}{x^3} = 2x-x^{-2} \longrightarrow$ อินทิเกรต จะได้ $f(x) \quad = \frac{2x^2}{2}-\frac{x^{-1}}{-1}+c$

$= x^2+x^{-1}+c$

โจทย์ให้ $g(1) = 2 \longrightarrow$ จาก $g(x) = \left(1+x^2\right)f(x)$ แทน $x = 1$ จะได้

$g(1) \quad = \left(1+1^2\right)f(1)$

$2 \quad = (2)\left(1^2+1^{-1}+c\right)$

$1 \quad = 2+c$

$-1 \quad = c$

ดังนั้น $f(x)=x^2+x^{-1}-1$ แทนใน $g(x)$ จะได้

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(1+x^2\right)\left(x^2+x^{-1}-1\right) \\ &= x^2+x^{-1}-1+x^4+x-x^2 \\ &= x^{-1}-1+x^4+x \\ g'(x) &= -x^{-2}+4x^3+1 \\ g''(x) &= 2x^{-3}+12x^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $$\int_{-1}^{2} x^3 g''(x)dx = \int_{-1}^{2} x^3\left(2x^{-3}+12x^2\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{2} 2+12x^5 dx$$

$$= 2x+\frac{12x^6}{6}\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= \left(2(2)+2\left(2^6\right)\right)-\left(2(-1)+2(-1)^6\right)$$

$$= 132-0$$

$$= 132$$

41. **ตอบ 15**

วิธีทำ ต่อเนื่องที่ $x=0$ แสดงว่า $\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$

$\to$ หา $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ จะได้ $x<0$ $\to$ ใช้สูตรบน $\to$ แทน $x=0$

จะได้ $=e^{2(0)}+2a=1+2a$

$\to$ หา $f(0)$ จะได้ $x=0$ $\to$ ใช้สูตรกลาง $\to$ แทน $x=0$ จะได้ $=a+b$

$\to$ หา $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ จะได้ $x>0$ $\to$ ใช้สูตรล่าง $\to$ แทน $x=0$

จะได้ $=\dfrac{\sqrt{1+b(0)+5(0^2)}-1}{x}=\dfrac{1-1}{0}=\dfrac{0}{0}$

$\to$ ต้องจัดรูปให้ x ตัดก่อน(มีรูท $\to$ คุณคอนจูเกต) แล้วค่อยแทน $x=0$ ลงใหม่ ดังนี้

$$=\frac{\sqrt{1+bx+5x^2}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+bx+5x^2}+1}{\sqrt{1+bx+5x^2}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{1+bx+5x^2}^{\,2}-1}{(x)\sqrt{1+bx+5x^2}+1}$$

$$=\frac{1+bx+5x^2-1}{(x)\sqrt{1+bx+5x^2}+1}$$

$$=\frac{bx+5x^2}{(x)\sqrt{1+bx+5x^2}+1}$$

$$=\frac{(x)\left(bx+5x^2\right)}{(x)\sqrt{1+bx+5x^2}+1}$$

$$=\frac{bx+5x^2}{\sqrt{1+bx+5x^2}+1}$$

$\to$ แทน $x=0$ จะได้ $=\dfrac{bx+5x^2}{\sqrt{1+bx+5x^2}+1}=\dfrac{b}{\sqrt{1}+1}=\dfrac{b}{2}$

จับสามตัวมาเท่ากัน จะได้สมการคือ $1+2a=a+b=\dfrac{b}{2}$

จากคู่หน้า จะได้ $1+2a=a+b$

$$a=b-1\ ...(*)$$

จากคู่หลัง จะได้

$$a+b=\frac{b}{2}$$

$$b-1+b=\frac{b}{2}$$

$$2b-1=\frac{b}{2}$$

$$4b-2=b$$

$$3b=2$$

$$b\quad\frac{2}{3}$$

แทน $b=\frac{2}{3}$ ใน (*) จะได้ $a=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$

ดังนั้น $15a+30b=15\left(-\frac{1}{3}\right)+30\left(\frac{2}{3}\right)=-5+20=15$

42. **ตอบ 8**

วิธีทำ

จะได้ $\frac{a_n}{b_n}=\frac{\frac{2^n}{n(n+2)}}{\frac{3^n}{5n+18}}=\frac{2n}{n(n+2)}\cdot\frac{5n+18}{3^n}=\frac{2^n}{3^n}\cdot\frac{5n+18}{n(n+2)}$

$\longrightarrow$ จะใช้เทคนิคเทเลสโคปิค ลองแยก $\frac{5n+18}{n(n+2)}$ เป็นผลลบของเศษส่วนสองตัว

แล้วหวังว่า ค่าลบของตัวหน้า จะหักกับค่าบวกของตัวหลังได้

สมมติให้ $\frac{5n+18}{n(n+2)}$ แยกเป็นผลลบได้ $\frac{A}{n}-\frac{B}{n+2}$

→ นั่นคือ $\frac{5n+18}{n(n+2)} = \frac{A}{n} - \frac{B}{n+2}$

$$\frac{5n+18}{n(n+2)} = \frac{A(n+2)-Bn}{n(n+2)}$$

$$5n+18 = An+2A-Bn$$

$$5n+18 = (A-B)n+2A$$

จัดเรียงตามกำลังของ n เพื่อเทียบ สปส.

ดังนั้น $\frac{5n+18}{n(n+2)} = \frac{9}{n} - \frac{4}{n+2}$

ดังนั้น $\frac{a_n}{b_n} = \frac{2^n}{3^n} \cdot \frac{5n+18}{n(n+2)} = \frac{2^n}{3^n}\left(\frac{3^2}{n} - \frac{2^2}{n+2}\right) = \frac{2^n}{(3^{n-2})(n)} - \frac{2^{n+2}}{(3^n)(n+2)}$

แทน $n = 1,2,3,\ldots$ ใน $\frac{a_n}{b_n} = \frac{2^n}{(3^{n-2})(n)} - \frac{2^{n+2}}{(3^n)(n+2)}$

แล้วเอามาบวกกันจะได้ ค่าของ $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \ldots$ ดังนี้

$$= \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4} + \frac{a_5}{b_5} + \ldots$$

$$= \frac{2^1}{(3^{-1})(1)} - \cancel{\frac{2^3}{(3^1)(3)}} + \frac{2^2}{(3^0)(2)} - \cancel{\frac{2^4}{(3^2)(4)}} + \cancel{\frac{2^3}{(3^1)(3)}} - \cancel{\frac{2^5}{(3^3)(5)}} + \cancel{\frac{2^4}{(3^2)(4)}} - \frac{2^6}{(3^4)(6)} + \cancel{\frac{2^5}{(3^3)(5)}} - \frac{2^7}{(3^5)(7)} + \ldots$$

จะเห็นว่า ค่าลบของตัวหน้า จะตัดกับ ค่าบวกของตัวที่ถัดไปสองตัว ได้ เสมอ

สุดท้าย จะเหลือค่าบวกของสองตัวหน้า (กับค่าลบสองตัวสุดท้าย ซึ่ง $\frac{2^n}{3^n} \cdot \frac{5n+18}{n(n+2)}$ เข้าใกล้ 0 เมื่อ n มีค่ามากๆ)

ดังนั้น จะได้ผลบวก = ค่าบวกของสองตัวหน้า $= \frac{2^1}{(3^{-1})(1)} + \frac{2^2}{(3^0)(2)} = 6+2 = 8$

43. ตอบ 1806

วิธีทำ

มีกระเบื้องแต่ละสีอย่างน้อยหนึ่งแผ่น แสดงว่า ใน 7 แผ่น ต้องมีครบทั้ง 3 สี
ดังนั้น จะมีกระเบื้องสีเดียวกันได้ไม่เกิน 5 แผ่น
(เพราะถ้ามีสีเดียวกัน 6 แผ่น รวมกับที่เหลืออีกแผ่นจะได้ไม่ครบ 3 สี)
ซึ่งโจทย์มีกระเบื้องอย่างน้อยสีละ 5 แผ่น
แสดงว่ามีกระเบื้องเหลือเฟือ นับได้โดยไม่ต้องกังวลว่ากระเบื้องสีไหนจะไม่พอ
โดยข้อนี้ จะนับแบบตรงข้าม แล้วเอาทั้งหมดตั้งลบ

จำนวนแบบทั้งหมด $\longrightarrow$ มี 7 ตำแหน่ง แต่ละตำแหน่งเลือกได้ 3 สี
$\longrightarrow$ เลือกได้ทั้งหมด $= 3^7$ แบบ

จำนวนแบบที่มีสีเดียว $\longrightarrow$ เลือก 1 สีจาก 3 สี ได้ 3 แบบ
(แดงล้วน,ขาวล้วน, เขียวล้วน) $\longrightarrow$ 3 แบบ

จำนวนแบบที่มีสองสี $\longrightarrow$ ขั้นที่ 1: เลือก 2 สีจาก 3 สี ได้ $\binom{3}{2}$ แบบ
$\longrightarrow$ ขั้นที่ 2 : นำ 2 สีจากขั้นแรกมาใช้
เช่น สมมติขั้นแรก เลือกได้สีแดงกับขาว
$\longrightarrow$ มี 7 ตำแหน่ง แต่ละตำแหน่งเป็นแดงหรือขาวได้c2 สี
$\longrightarrow$ เลือกได้ 2^7 แบบ $\longrightarrow$ แต่อยากได้แบบที่มีสองสี
ต้องหักแบบที่มีสีเดียวออก 2 แบบ (แดงล้วน กับขาวล้วน)
ได้ $2^7 - 2$ แบบ
$\longrightarrow$ จะได้จำนวนแบบที่มีสองสี $= \binom{3}{2}\left(2^7 - 2\right)$ แบบ

ดังนั้น จำนวนแบบที่มีครบทั้ง 3 สี

$=$ จำนวนแบบทั้งหมด $-$ จำนวนแบบที่มีสีเดียว $-$ จำนวนแบบที่มีสองสี

$$= 3^7 - 3 - \binom{3}{2}\left(2^7 - 2\right)$$

$$= 2187 - 3 - (3)(126) = 1806$$

44. ตอบ 0.5

วิธีทำ

$$a_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \left(\frac{2^2-1}{2^2}\right)\left(\frac{3^2-1}{3^2}\right)\left(\frac{4^2-1}{4^2}\right)\left(\frac{5^2-1}{5^2}\right)\cdots\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$$

$$= \left(\frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\right)\left(\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\right)\left(\frac{(4-1)(4+1)}{4^2}\right)\left(\frac{(5-1)(5+1)}{5^2}\right)\cdots\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)$$

$$= \left(\frac{(1)}{(2)}\frac{(3)}{(2)}\right)\left(\frac{(2)}{(3)}\frac{(4)}{(3)}\right)\left(\frac{(3)}{(4)}\frac{(5)}{(4)}\right)\left(\frac{(4)}{(5)}\frac{(6)}{(4)}\right)\cdots\left(\frac{(n-1)}{(n)}\frac{(n+1)}{(n)}\right)$$

จะเห็นว่า ตัวเลขในกรอบสี่เหลี่ยม ตัดกันได้หมด เหลือ $a_n = \frac{(1)(n+1)}{(2)(n)} = \frac{n+1}{2n}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{n+1}{2n} \to$ ดีกรีบน $=$ ดีกรีล่าง

จะได้ลิมิต $= \frac{\text{สปส บน}}{\text{สปส ล่าง}} = \frac{1}{2} = 0.5$

45. ตอบ 60

วิธีทำ ให้ $|x| - x + y = 8 \ldots(1)$

$x + |y| + y = 10 \ldots(2)$

สังเกตว่า ถ้า x เป็นบวก แล้ว $|x| = -x$ ใน (1) จะตัดกันได้

ดังนั้น เราจะลองสมมติให้ $x \geq 0$ ดู $\longrightarrow$ จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์จะได้ $|x| = x$

จะได้ (1) : $x - x + y = 8$

$y = 8$

แทนใน (2) ได้ $x + |8| + 8 = 10$

$x = -6 \longrightarrow$ ขัดแย้งกับที่สมมติให้ $x \geq 0$

ดังนั้น $x \geq 0$ ไม่ได้ $\longrightarrow$ จึงสรุปได้ว่า $x < 0$ เท่านั้น

จาก $x < 0$ และจากสมบัติของค่าสัมบูรณ์จะได้ $|x| = -x$

จะได้ (1) : $(x) - x + y = 8$

$-2x + y = 8 \ldots(3)$

ถัดมา สังเกตว่าถ้า y เป็นลบ แล้ว $|y| = -y$ ใน (2) จะตัดกันได้

ดังนั้น เราจะลองสมมติให้ $y < 0$ ดู $\longrightarrow$ จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์จะได้ $|y| = -y$

จะได้ (2) : $x + (-y) + y = 10$

$$x = 10 \quad ...(3)$$ $\longrightarrow$ ขัดแย้งกับข้อสรุปก่อนหน้า ที่ว่า $x < 0$

ดังนั้น $y < 0$ ไม่ได้ $\longrightarrow$ จึงสรุปได้ว่า $y \geq 0$ เท่านั้น

จาก $y \geq 0$ และจากสมบัติของค่าสัมบูรณ์จะได้ $|y| = y \longrightarrow$ จะได้ (2) :

$$x + y + y = 10$$
$$x + 2y = 10 \quad ...(4)$$

เอา (3) กับ (4) มาแก้ระบบสมการ

$2\times(4)$ แล้วบวกกับ (3) จะทำให้ x ตัดกันได้

$$-2x + y = 8 \quad ...(3)$$
$$x + 2y = 10 \quad ...(4)$$
$$2\times(4) \qquad 2x + 4y = 20 \quad ...(5)$$
$$(3)+(5): \qquad 5y = 28$$
$$y = 5.6$$

แทน $y = 5.6$ ใน (4) : $x + 2(5.6) = 10$

$$x = 10 - 11.2 = -1.2$$

ดังนั้น $20x + 15y = 20(-1.2) + 15(5.6)$

$$= -24 + (84) = 60$$