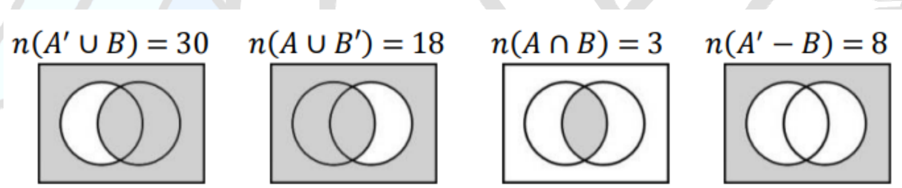
เฉลย

1.	3	11.	1	21.	2	31.	4	41.	15.87
2.	3	12.	4	22.	3	32.	5	42.	100
3.	1	13.	1	23.	4	33.	2	43.	721
4.	2	14.	4	24.	2	34.	5	44.	22
5.	3	15.	2	25.	1	35.	3	45.	152
6.	3	16.	4	26.	4	36.	153		
7.	1	17.	2	27.	2	37.	3		
8.	2	18.	4	28.	1	38.	12		
9.	4	19.	3	29.	4	39.	8		
10.	3	20.	3	30.	2	40.	21		

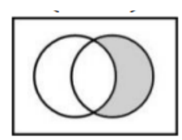
<u>แนวคิด</u>

1. **ตอบ : 3**

วิธีทำ วาดได้ 4 รูป



เอารูปแรก หักด้วย (รูปที่สามกับสี่รวมกัน) จะเหลือ



เอารูปที่ห้าที่เพิ่งได้ รวมกับรูปที่สอง จะได้ครบทุก ส่วนพอดี

ดังนั้น ทุกส่วน $= 19 + 18 = 37$

2. ตอบ : 3

วิธีทำ p: จาก $a<b$ เนื่องจาก $ab>0$ เราสามารถเอา ab หารตลอด โดยไม่ต้องกลับเครื่องหมายได้ จะได้ $\frac{a}{ab}<\frac{b}{ab}$ ดังนั้น $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$ สลับข้าง ได้ $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ ดังนั้น p เป็นจริง

q: การที่ $ab>0$ อาจมาจาก ลบ คูณ ลบ กลายเป็นบวกได้
และถ้า a, b เป็นลบ เราจะหา $\sqrt{a}$ กับ $\sqrt{b}$ ไม่ได้ ในขณะที่ยังหา $\sqrt{ab}$ ได้อยู่
ดังนั้น $\sqrt{ab}$ กับ $\sqrt{a}\sqrt{b}$ จะไม่เหมือนกันในกรณีนี้ ดังนั้น q เป็นเท็จ

แทน $p\equiv T, q\equiv F$ ในแต่ละตัวเลือก จะได้***ข้อ 3 เป็นจริง***

1. $(T\Rightarrow F)\vee(F\wedge\sim T)\equiv F\vee F\equiv F$
2. $(\sim F\Rightarrow\sim T)\wedge(\sim F\vee T)\equiv F\wedge\ldots\equiv F$
3. $(T\wedge\sim F)\wedge(F\Rightarrow T)\equiv T\wedge T\equiv T$
4. $(\sim T\Rightarrow F)\Rightarrow(T\wedge F)\equiv T\Rightarrow F\equiv F$

3. ตอบ : 1

วิธีทำ ก) แทน $p\equiv T$ จะได้ $(T\vee q)\Leftrightarrow(r\wedge s)\equiv T$

จะได้ $r\wedge s\equiv T$ เท่านั้น ถึงจะ $\Leftrightarrow$ แล้วเป็น T

$T\Leftrightarrow(r\wedge s)\equiv T$ จะได้ r, s ต้องจริงทั้งคู่ ถึงจะ $\wedge$ กันแล้วเป็น T ดังนั้น ข้อ (ก) ถูก

ข) ทำทั้งสองฝั่งให้เป็นรูปอย่างง่าย

$$\begin{aligned}
(p\wedge q)\Rightarrow(r\wedge s) &\equiv [q\Rightarrow(p\Rightarrow r)]\wedge[p\Rightarrow(q\Rightarrow s)]\\
\sim(p\wedge q)\vee(r\wedge s) &\equiv [\sim q\vee(\sim p\vee r)]\wedge[\sim p\vee(\sim q\vee s)]\\
(\sim p\vee\sim q)\vee(r\wedge s) &\equiv [\sim q\vee\sim p\vee r]\wedge[\sim p\vee\sim q\vee s]\\
&\equiv (\sim q\vee\sim p)\vee[r\wedge s]
\end{aligned}$$

ทั้งสองฝั่ง จัดรูปได้เหมือนกัน จึงสมมูลกัน ดังนั้น ข้อ (ข) ถูก

4. **ตอบ : 2**

วิธีทำ ย้ายข้าง ได้อสมการ คือ $x^2-3x-2+\sqrt{x^2-3x+4}>0$

เปลี่ยนตัวแปร ให้ $\sqrt{x^2-3x+4}=a$ แล้วจัดรูป x อื่นๆ ที่เหลือให้กลายเป็น a

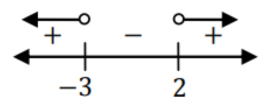
จะได้ $x^2-3x+4=a^2$

$$x^2-3x \quad = a^2-4$$

ดังนั้น อสมการจะกลายเป็น $a^2-4-2+a \ >0$

$$a^2+a-6 \quad >0$$

$$(a+3)(a-2)>0$$



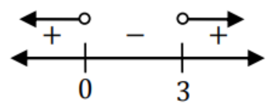
แต่ a คือค่ารูท เป็นลบไม่ได้ จะได้ $a>2$ เท่านั้น

แทนค่า a กลับไป จะได้ $\sqrt{x^2-3x+4}>2$

$$x^2-3x+4>4$$

$$x^2-3x \quad >0$$

$$x(x-3) \quad >0$$

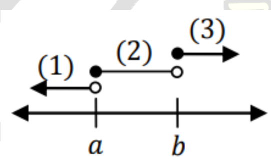


ซึ่งจะเป็นสับเซทของข้อ 2 เท่านั้น

5. **ตอบ : 3**

วิธีทำ เนื่องจากมี $x-a$ และ $x-b$ ในค่าสัมบูรณ์ และ $a<b$

วาดเส้นจำนวน จะแบ่งเป็น 3 กรณี ดังรูป



กรณี $(1)\ x<a:$ จะได้ทั้ง $x-a$ และ $x-b$ เป็นลบ

ถอดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ ได้

$$(-(x-a))-(-(x-b)) \quad = b-a$$

$$-x+a+x-b \quad = b-a$$

$$a-b \quad = b-a$$

เนื่องจาก $a<b$ ดังนั้น ฝั่งซ้ายติดลบ แต่ฝั่งขวาเป็นบวก สมการเป็นเท็จโดยไม่ขึ้นกับค่า $x\rightarrow$ กรณีนี้ ***ไม่มีคำตอบ***

กรณี $(2)\ a\le x<b:$ จะได้ $x-a\ge 0$ แต่ $x-b$ เป็นลบ

ถอดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ ได้ $(x-a)-(-(x-b)) \ = b-a$

$$x-a+x-b \quad = b-a$$

$$2x \quad = 2b$$

$$x \quad = b$$

แต่ $x=b$ ไม่อยู่ในเงื่อนไข $a\le x<b$ ดังนั้น กรณีนี้ ***ไม่มีคำตอบ***

กรณี $(3)\ x\ge b:$ จะได้ทั้ง $x-a$ และ $x-b\ge 0$

ถอดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ ได้
$$\begin{aligned} (x-a)-(x-b) &= b-a \\ x-a-x+b &= b-a \\ -a+b &= b-a \end{aligned}$$

จะได้สมการเป็นจริงเสมอ ดังนั้น x ทุกค่าในกรณีนี้ จะทำให้สมการเป็นจริง $\rightarrow$ ได้ ***คำตอบคือ*** $[b, \infty)$

6. **ตอบ : 3**

วิธีทำ

$$y = \frac{2x^2+4x+4}{x+1}$$ หาเรนจ์ ต้องจัดรูปสมการให้เป็น “x = ก้อนของ y”

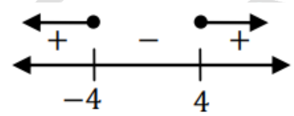
$$xy+y = 2x^2+4x+4$$ แต่ข้อนี้ x เป็นกำลังสอง ต้องจัดในรูป $ax^2+bx+c=0$

$$0 = 2x^2+4x-xy+4-y$$ แล้วใช้สูตร $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$0 = 2x^2+(4-y)x+(4-y)$$

$$x = \frac{-(4-y) \pm \sqrt{(4-y)^2-4(2)(4-y)}}{2(2)}$$

ใน $\sqrt{\ }$ ต้อง ≥ 0 ดังนั้น
$$\begin{aligned} (4-y)^2-4(2)(4-y) &\geq 0 \\ 16-8y+y^2-32+8y &\geq 0 \\ y^2-16 &\geq 0 \\ (y+4)(y-4) &\geq 0 \end{aligned}$$



ได้ เรนจ์ คือ $(-\infty,-4) \cup [4,\infty)$ ถัดมา ต้องแก้อสมการในตัวเลือก

1. $(x+7)(x-1) \geq 0 \rightarrow (-\infty,-7) \cup [1,\infty)$
2. $(x+5)(x-2) \geq 0 \rightarrow (-\infty,-5) \cup [2,\infty)$
3. $(x+4)(x-3) \geq 0 \rightarrow (-\infty,-4) \cup [3,\infty)$
4. $(x+2)(x-8) \geq 0 \rightarrow (-\infty,-2) \cup [8,\infty)$

จะเห็นว่า ข้อ 3 จะคลุม $(-\infty,-4) \cup [4,\infty)$ ได้ ดังนั้น ***<u>ตอบข้อ 3</u>***

7. ตอบ : 1

วิธีทำ $A^2 + xI = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & 0 \\ 0 & x+1 \end{bmatrix}$

แต่จาก $\det\left(A^2 + xI\right) = 0$ จะได้ $(x+1)^2 = 0$ ดังนั้น $x = -1$

ก) $A + xI = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \to \det$ ได้ $(0)(-2)-(0)(-2) = 0 \to$ ***(ก) ถูก***

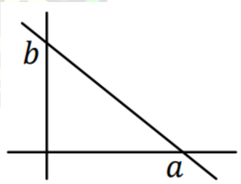
ข) จากที่เคยทำเรามี $A^2 + xI = \begin{bmatrix} x+1 & 0 \\ 0 & x+1 \end{bmatrix}$ แทน $x = -1$ จะได้ $A^2 + xI = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{0}$

ดังนั้น ฝั่งซ้าย $\det\left(A^2 + xI - B\right) = \det\left(\underline{0} - B\right) = \det(-B) = (-1)^2 \det B = \det B$

และฝั่งขวา $\det\left(B^t\right) = \det B$ ด้วย $\to$ ***(ข) ถูก***

8. ตอบ : 2

วิธีทำ

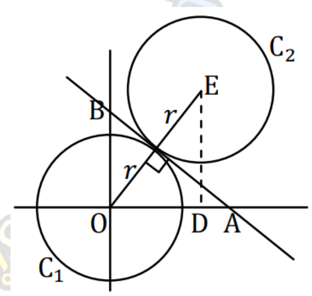


วาดรูปเส้นตรง L ก่อน จะเห็นว่า
ถ้าแทน $x = 0$ จะได้ $y = 0$ จะได้ $x = a$
ดังนั้น L เป็นเส้นตรงที่ตัดแกน y ที่ b และตัดแกน x ที่ a
เนื่องจาก $a, b > 0$ จะวาดได้ดังรูป

วาด C_1 กับ C_2 ตามข้อมูลที่โจทย์ให้ จะได้ดังรูป

$r =$ ระยะจากจุด $(0,0)$ ถึงเส้นตรง $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (จัดรูปได้เป็น $bx + ay - ab = 0$)

$= \frac{|0+0-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}} \to$ เนื่องจาก $a, b > 0$ จะถอดค่าสัมบูรณ์ได้ $r = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$



จะเห็นว่า $\Delta EOD \sim \Delta ABO$ เพราะมีมุมฉากเท่ากัน และ $O\hat{E}D = B\hat{A}O$

(เพราะต่างก็บวกกับ $E\hat{O}A$ ได้ $90°$) ดังนั้น $\frac{EO}{AB} = \frac{OD}{BO} = \frac{DE}{OA}$

จาก $OA = a, OB = b$ พีทากอรัสจะได้ $AB = \sqrt{a^2+b^2}$

และจาก $EO = 2r = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ จะได้ $OD = \frac{EO}{AB} \times BO = \frac{2ab^2}{a^2+b^2}$

และ $DE = \frac{EO}{AB} \times OA = \frac{2a^2b}{a^2+b^2}$

ดังนั้น C_2 มี ศก $\left(\frac{2ab^2}{a^2+b^2}, \frac{2a^2b}{a^2+b^2}\right)$ และ $r = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \to$

สมการคือ $\left(x-\frac{2ab^2}{a^2+b^2}\right)^2+\left(y-\frac{2a^2b}{a^2+b^2}\right)^2=\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2$

จัดรูป $x^2-\frac{4ab^2x}{a^2+b^2}+\frac{4a^2b^4}{\left(a^2+b^2\right)^2}+y^2-\frac{4a^2by}{a^2+b^2}+\frac{4a^4b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

$$x^2+y^2-\frac{4ab^2x}{a^2+b^2}-\frac{4a^2by}{a^2+b^2}+\frac{4a^2b^4}{\left(a^2+b^2\right)^2}+\frac{4a^4b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$x^2+y^2-\frac{4ab\left(bx+ay\right)}{a^2+b^2}+\frac{4a^2b^2\left(b^2+a^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$x^2+y^2-\frac{4ab\left(bx+ay\right)}{a^2+b^2}+\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$x^2+y^2-\frac{4ab\left(bx+ay\right)}{a^2+b^2}+\frac{3a^2b^2}{a^2+b^2}=0$$

คูณตลอดด้วย a^2+b^2 จะได้ $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)-4ab\left(bx+ay\right)+3a^2b^2=0$

9. **ตอบ : 4**

วิธีทำ จัดรูปไฮเพอร์โบลา ได้เป็น $(x-1)^2-y^2=1$ จะได้เส้นกำกับคือ $(x-1)^2-y^2=1 \quad \ldots(1)$

แก้ระบบสมการ กับ $y=2x \quad \ldots(2)$ เพื่อหาจุดตัด $\rightarrow$

แทน $y=2x$ จะได้ $(x-1)^2-(2x)^2=0$

$$\left(x-1-2x\right)\left(x-1+2x\right)=0$$

$$\left(-x-1\right)\left(3x-1\right)=0$$

$$x=-1,\frac{1}{3}$$

แทนใน (2) จะได้ $y=-2,\frac{2}{3}\rightarrow$ จุดตัดคือ $\left(-1,-2\right),\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

จะได้จุดกึ่งกลางจุดตัด คือ $\left(\frac{-1+\frac{1}{3}}{2},\frac{-2+\frac{2}{3}}{2}\right)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ = โฟกัสของพาราโบลา

จากไฮเพอร์โบลา $(x-1)^2-y^2=1$ เป็นแนวนอน มี ศก ที่ $(1,0)$

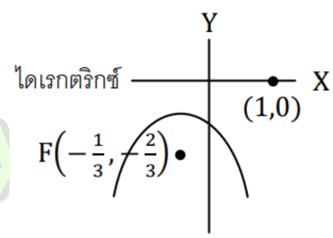
ดังนั้น เส้นตรงที่ผ่านจุดยอดทั้งสอง จะผ่าน $(1,0)$ ในแนวนอนด้วย

จะได้ ไดเรกตริกซ์ ของพาราโบลา คือ แกน x นั่นเอง ซึ่งจะวาดพาราโบลาได้ดังรูป

จุดยอด V จะอยู่ตรงกลางระหว่าง F และเส้นไดเรกตริกซ์ $=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)=(h,k)$

และ $c=$ ระยะจาก V ถึง $F=\frac{1}{3}$ แทน (h,k) และ c ใน พาราโบลาคว่ำ

จะได้
$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=-4\left(\frac{1}{3}\right)\left(y+\frac{1}{3}\right)$$
$$x^2+\frac{2x}{3}+\frac{1}{9}=-\frac{4y}{3}-\frac{4}{9}$$
$$9x^2+6x+1=-12y-4$$
$$9x^2+6x+12y+5=0$$



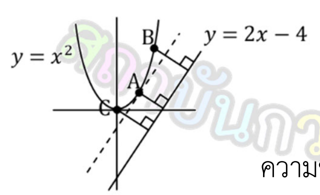
10. **ตอบ : 3**

วิธีทำ ก. จะสอดคล้องกับสมบัติของวงรี ที่มี $(0,-2)$ และ $(2,-2)$ เป็นจุดโฟกัส และมีแกนเอกยาว $2\sqrt{5}$ โฟกัส เรียงตามแนวนอน จะได้เป็นวงรีแนวนอน โดยจุดศูนย์กลาง

$(h,k)=\left(\frac{0+1}{2},-2\right)=(1,-2)$ ระยะโฟกัส $c=2-1=1$ และ $a=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$ ดังนั้น

$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{5-1}=2$

จะได้วงรี คือ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1\rightarrow\frac{(x-1)^2}{\sqrt{5}^2}+\frac{(y+2)^2}{2^2}=1$
$$\frac{x^2-2x+1}{5}+\frac{y^2+4y+4}{4}=1$$
$$4x^2-8x+4+5y^2+20y+20=20$$
$$4x^2+5y^2+8x+20y+4=0\rightarrow \textit{ก. ผิด}$$

ข. 

วาดคร่าวๆ ได้ดังรูป

จะเห็นว่า จุดบนพาราโบลา ที่ใกล้เส้นตรงมากสุด คือจุด A ซึ่งจะมีสมบัติว่า ความชันเส้นสัมผัส ณ จุด A ต้องเท่ากับ ความชันเส้นตรง ความชันของพาราโบลาคือ $y'=2x$ จะได้ความชัน ณ จุด $(1,1)$ คือ $2(1)=2$ และ เส้นตรง $y=2x+4$ จะมีความชัน $=2\rightarrow$ ***ข. ถูก***

11. ตอบ : 1

วิธีทำ ก. ฝั่งขวา $= 2\sin\theta + 2\cos\dfrac{3\theta+5\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta+5\theta}{2}$

$$= 2\sin\theta + 2\cos 4\theta\sin(-\theta)$$
$$= 2\sin\theta + 2\cos 4\theta\sin\theta$$
$$= 2\sin\theta(1-\cos 4\theta)$$
$$= 2\sin\theta\left(1-\left(1-2\sin^2 2\theta\right)\right)$$
$$= 2\sin\theta\left(\qquad 2\sin^2 2\theta\right)$$
$$= 4\sin\theta\sin^2 2\theta$$
$$= 4\sin\theta(2\sin\theta\cos\theta)^2$$
$$= 16\sin^3\theta\cos^2\theta \qquad \rightarrow \textit{ก. ถูก}$$

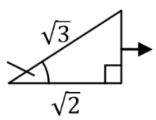
ข. $\sin 3\theta = (\sin 2\theta + \sin\theta)(2\cos\theta - 1)$

$$3\sin\theta - 4\sin^3\theta = (2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta)(2\cos\theta - 1)$$
$$\sin\theta\left(3-4\sin^2\theta\right) = \sin\theta(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)$$
$$= \sin\theta\left(4\cos^2\theta - 1\right)$$
$$= \sin\theta\left(4\left(1-\sin^2\theta\right)-1\right)$$
$$= \sin\theta\left(4-4\sin^2\theta-1\right)$$
$$= \sin\theta\left(3-4\sin^2\theta\right) \qquad \rightarrow \textit{ข. ถูก}$$

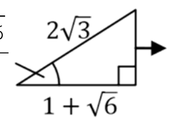
12. ตอบ : 4

วิธีทำ เราจะเปลี่ยน arccos ให้เป็น arccot แล้วค่อยกระจาย cot เข้าไปด้วยสูตร $\cot(A-B)=\dfrac{\cot B\cot A+1}{\cot B-\cot A}$ เนื่องจาก ตัวเลขหลัง arc เป็นบวก จึงใช้สามเหลี่ยมได้โดยไม่ต้องระวังเรื่อง Quadrant

$$\arccos\sqrt{\frac{2}{3}} \rightarrow \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \qquad\qquad \arccos\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} \rightarrow \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}=\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$$

$\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$


$$=\sqrt{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2} = 1$$

$\arccos\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$


$$\begin{aligned}&=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(1+\sqrt{6}\right)^2}\\&=\sqrt{12-\left(1+2\sqrt{6}+6\right)}\\&=\sqrt{5-2\sqrt{6}}\\&=\sqrt{3}-\sqrt{2}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\cot\left(\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\dfrac{\text{ชิด}}{\text{ข้าม}}=\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$ ดังนั้น $\cot\left(\arccos\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}\right)=\dfrac{\text{ชิด}}{\text{ข้าม}}=\dfrac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

ดังนั้น $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}=\operatorname{arccot}\sqrt{2}$ ดังนั้น $\arccos\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\operatorname{arccot}\frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

ดังนั้น $\cot\left(\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}\right)=\cot\left(\arccos\sqrt{2}-\arccos\frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)$

$$=\frac{\cot\left(\operatorname{arccot}\frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)\cot\left(\arccos\sqrt{2}\right)+1}{\cot\left(\operatorname{arccot}\frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)-\cot\left(\arccos\sqrt{2}\right)}$$

cot กับ arccot จะตัดกันเหลือ $=\dfrac{\frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}+1}{\frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\sqrt{2}}$

$$=\frac{\frac{\left(1+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\frac{1+\sqrt{6}-\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1+\sqrt{6}-\sqrt{6}+2}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{3}$$

$$=\sqrt{3}$$

13. ตอบ : 1

วิธีทำ ก. จากสมบัติในเรื่องปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน จะได้

$\bar{u}\cdot\left(\bar{v}\times\bar{w}\right)=\bar{v}\cdot\left(\bar{w}\times\bar{u}\right)=\bar{w}\cdot\left(\bar{u}\times\bar{v}\right)$

$\bar{u}\cdot\left(\bar{w}\times\bar{v}\right)=\bar{w}\cdot\left(\bar{v}\times\bar{u}\right)=\bar{v}\cdot\left(\bar{u}\times\bar{w}\right)$ และมีค่าเป็นลบของประโยคบน $\rightarrow$ ***ก. ถูก***

ข. จะได้ $\left|\bar{u}-\bar{v}\right|^2=\left|\bar{v}+\bar{w}\right|^2$ ใช้สูตรได้เป็น $\left|\bar{u}\right|^2+\left|\bar{v}\right|^2-2\bar{u}\cdot\bar{v}=\left|\bar{v}\right|^2+\left|\bar{w}\right|^2+2\bar{v}\cdot\bar{w}$

แต่ $\left|\bar{u}\right|=\left|\bar{w}\right|\rightarrow$ ตัดตัวที่เท่ากันได้ เหลือ $-2\bar{u}\cdot\bar{v}=2\bar{v}\cdot\bar{w}$

แต่ $\bar{u}\perp\bar{v}$ จะได้ $\bar{u}\cdot\bar{v}=0$ ดังนั้น $\bar{v}\perp\bar{w}$ (ถ้า $\left|\bar{v},\left|\bar{w}\right|\neq 0\right|$) $\rightarrow$ ***ข. ถูก***

14. ตอบ : 4

วิธีทำ ใช้สูตรกำลังสามสมบูรณ์ จะได้ $(1-i)^3=1-3i+3i^2-i^3=1-3i-3+i=-2-2i$

จะได้ ฝั่งซ้าย คือ $x(3+5i)+y(-2-2i)=(3x-2y)+(5x-2y)i$

เทียบกับฝั่งขวา จะได้ $3x-2y=3\ \ldots(1)$ และ $5x-2y=7\ \ldots(2)$

$(2)-(1):2x=4\rightarrow x=2$ แทนใน (1) ได้ $y=\dfrac{3-6}{-2}=\dfrac{3}{2}\rightarrow z=2+\dfrac{3}{2}i$

ก. $iz=2i-\dfrac{3}{2}$ ดังนั้น ฝั่งซ้าย $=\mathrm{Im}\left(-2i-\dfrac{3}{2}\right)=-2,$ ฝั่งขวา $=-\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2}\rightarrow$ ***ก. ผิด***

ข. คูณไขว้ได้ $7=z(8-6i)=\left(2+\dfrac{3}{2}i\right)(8-6i)=\left(2+\dfrac{3}{2}i\right)(2)(4-3i)=(4+3i)(4-3i)$

เข้าสูตรผลต่างกำลังสอง ได้ $4^2-\left(-3^2\right)=25\rightarrow$ ***ข. ผิด***

15. ตอบ : 2

วิธีทำ ให้มีคนทั้งหมด n คน จะได้จำนวนวิธีเลือกสองคน $=\binom{n}{2}$, จำนวนวิธีเลือก ชายสองคน $=\binom{6}{2}$

ดังนั้น $\dfrac{\binom{6}{2}}{\binom{n}{2}}=\dfrac{1}{8}\rightarrow 8\cdot\dfrac{6\cdot 5}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}\rightarrow 240=n(n-1)$

แยก 240 เป็นสองตัวติดกันคูณกัน ได้ $16\cdot 15\rightarrow n=16\rightarrow$ มี หญิง $=16-6=10$ คน

เลือก 5 คน เป็นชายไม่น้อยกว่า 3 คือ เป็น “ชาย 3 หญิง 2” หรือ “ชาย 4 หญิง 1” หรือ “ชาย 5 หญิง 0” จะได้ความน่าจะเป็น $=\dfrac{\binom{6}{3}\binom{10}{2}+\binom{6}{4}\binom{10}{1}+\binom{6}{5}\binom{10}{0}}{\binom{16}{5}}=\dfrac{20\cdot 45+15\cdot 10+6}{\frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}}$

$=\dfrac{1056}{2\cdot 14\cdot 13\cdot 12}=\dfrac{88}{2\cdot 14\cdot 13}=\dfrac{22}{91}$

16. ตอบ : 4

วิธีทำ จะใช้วิธีนับแบบตรงข้าม : พิจารณาเฉพาะในกลุ่มเลขที่ “ไม่มี 7” ในหลักใดเลย จะแบ่งเป็น <u>มี</u>

5 กับ ไม่มี 5 ดังนั้น จำนวนเลขที่ไม่มี $7 =$ จำนวนเลขที่ไม่มี 7 และมี 5 $+$ จำนวนเลขที่ไม่มี 7 และไม่มี 5

จำนวนเลขที่ไม่มี $7 \rightarrow$ หลักแรกห้ามเป็น $0,7$ จะเหลือ 8 แบบ และสองหลักที่เหลือห้ามเป็น 7 จะเหลือ 9 แบบ ได้ $= 8 \times 9 \times 9 = 648$ แบบ

ไม่มี 7 และไม่มี 5 $\rightarrow$ หลักแรกห้ามเป็น $0,5,7$ จะเหลือ 7 แบบ และสองหลักที่เหลือห้ามเป็น 5 กับ 7 จะเหลือ 8 แบบ ได้ $= 7 \times 8 \times 8 = 448$ แบบ

ดังนั้น จำนวนแลขที่ไม่มี 7 และมี 5 $= 648 - 448 = 200$

17. ตอบ : 2

วิธีทำ ต่อเนื่อง แสดงว่าบริเวณรอยต่อ คือ $x = 2$ และ $x = 5$ ต้องได้ค่า $f(x)$ เท่ากัน

ที่ $x = 2:\ 2^2 + a(2) + b = \sqrt{2-1} \rightarrow 2a + b = -3 \ \ldots(1)$

ที่ $x = 5:\ \sqrt{5-1} = a(5) + b \qquad \rightarrow 5a + b = \ 2 \ \ldots(2)$

หา $a - b$ จาก $(2) - 2(1)$ ได้ $2 - 2(-3) = 8$ ก็ได้

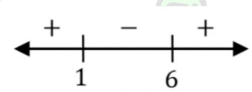
หรือถ้าจะทำตรงๆ $(2) - (1)$ จะได้ $3a = 5 \rightarrow a = \frac{5}{3}$ แทนใน (1) ได้

$b = -3 - \frac{10}{3} = -\frac{19}{3}$ จะได้ $a - b = \frac{5}{3} - \left(-\frac{19}{3}\right) = \frac{24}{3} = 8$

18. ตอบ : 4

วิธีทำ เราต้องดูว่า $x^2 - 7x + 6$ เป็นลบเป็นบวกในช่วงไหนบ้าง

จะได้กำจัดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ตามสมบัติ $|a| = \begin{cases} a & ,a \geq 0 \\ -a & ,a < 0 \end{cases}$ ได้



แยกตัวประกอบได้ $x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6)$ ซึ่งเขียนเส้นจำนวนได้ดังรูป

อินทิเกรต ตั้งแต่ -2 ถึง 2 ดังนั้น จะผ่านการเปลี่ยนเครื่องหมาย 1 ครั้ง ที่ $x = 1$

-2 ถึง 1 เป็นบวก $\rightarrow$ จะได้ $\left|x^2 - 7x + 6\right| = x^2 - 7x + 6$

1 ถึง 2 เป็นลบ $\rightarrow$ จะได้ $\left|x^2 - 7x + 6\right| = -\left(x^2 - 7x + 6\right)$

เราจะแบ่งอินทิเกรตเป็น 2 ช่วง เพื่อกำจัดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ ดังนี้

$$\int_{-2}^{2}\left|x^2-7x+6\right|dx = \int_{-2}^{2} x^2-7x+6\,dx + \int_{1}^{2} -\left(x^2-7x+6\right)dx$$

$$= \int_{-2}^{1} x^2-7x+6\,dx - \int_{1}^{2} x^2-7x+6\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+6x\Big|_{-2}^{1}\right)-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+6x\Big|_{1}^{2}\right)$$

$$= \left(\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{2}+6\right)-\left(-\frac{8}{3}-\frac{28}{2}-12\right)\right)-\left(\left(\frac{8}{3}-\frac{28}{2}+12\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{2}+6\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}-\frac{7}{2}+6+\frac{8}{3}+\frac{28}{2}+12-\frac{8}{3}+\frac{28}{2}-12+\frac{1}{3}-\frac{7}{2}+6$$

$$= \frac{2}{3}+21+12$$

$$= \frac{101}{3}$$

ดังนั้น $a+b=101+3=104$

19. **ตอบ : 3**

วิธีทำ ก. ฟังก์ชันเพิ่ม ต้องดูจาก $f'(x)$ เป็นบวก

$$f'(x) = \frac{\left(x^6-3x^3+64\right)\left(12x^2\right)-\left(4x^3\right)\left(6x^5-9x^2\right)}{\left(x^6-3x^3+64\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x^6-3x^3+64\right)\left(12x^2\right)-\left(12x^3\right)\left(2x^5-3x^2\right)}{\left(x^6-3x^3+64\right)^2}$$

$$= \frac{12x^2\left[\left(x^6-3x^3+64\right)-\left(x\right)\left(2x^5-3x^2\right)\right]}{\left(x^6-3x^3+64\right)^2}$$

$$= \frac{12x^2\left[x^6-3x^3+64-2x^6+3x^3\right]}{\left(x^6-3x^3+64\right)^2}$$

$$= \frac{12x^2\left[-x^6+64\right]}{\left(x^6-3x^3+64\right)^2}$$

$$=\frac{-12x^2\left[x^6-64\right]}{\left(x^6-3x^3+64\right)^2}$$

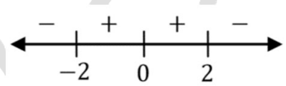
$$=\frac{-12x^2\left(x^3-8\right)\left(x^3+8\right)}{\left(x^6-3x^3+64\right)^2}$$

$$=\frac{-12x^2\left(x-2\right)\left(x^2+2x+4\right)\left(x+2\right)\left(x^2-2x+4\right)}{\left(x^6-3x^3+64\right)^2}$$

$$=\frac{-12x^2\left(x-2\right)\left(x^2+2x+1+3\right)\left(x+2\right)\left(x^2-2x+1+3\right)}{\left(x^6-3x^3+64\right)^2}$$

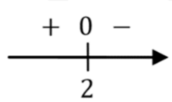
$$=\frac{-12x^2\left(x-2\right)\left(\left(x+1\right)^2+3\right)\left(x+2\right)\left(\left(x-1\right)^2+3\right)}{\left(x^6-3x^3+64\right)^2}$$

จะเห็นว่า $\left(x+1\right)^2+3, \left(x-1\right)^2+3$ และ $\left(x^6-3x^3+64\right)^2$ เป็นบวกได้เท่านั้น ไม่มีผลกับเครื่องหมาย x^2 เป็นบวกหรือศูนย์ได้เท่านั้น ดังนั้นจะมี 0 อยู่บนเส้นจำนวน แต่ไม่มีการกลับเครื่องหมาย $x-2$ และ $x+2$ พล็อตเส้นจำนวนได้ตามปกติ และ -12 ที่คูณอยู่ จะทำให้ช่วงขวาสุด เริ่มด้วย $-$ ดังรูป



จะเห็นว่า ช่วง $\left(0,3\right)$ คลุมช่วง $\left(2,3\right)$ ที่ $f'\left(x\right)$ เป็นลบด้วย $\rightarrow$ ***ก. ผิด***

ข. ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ จะเกิดที่ $f'\left(x\right)=0$ โดย $f'\left(x\right)$ รอบๆ ต้องเปลี่ยนจาก $+\rightarrow 0\rightarrow -$ ได้แก่ $x=2$ นั่นเอง



ดังนั้น ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ $=f\left(2\right)=\dfrac{4\left(2^3\right)}{2^6-3\left(2^3\right)+64}$

ตัด 2^3 ทั้งเศษและส่วน ได้ $=\dfrac{4}{2^3-3+8}=\dfrac{4}{13}\rightarrow$ ***ข. ถูก***

20. ตอบ : 3

วิธีทำ ต้องทำ a_n ให้อยู่ในรูปเศษส่วนก่อน ค่อยหาลิมิตของลำดับ

คูณคอนจูเกต จะได้ $a_n = \left(\sqrt{n^2+16n+3}-\sqrt{n^2+2}\right)\times\frac{\sqrt{n^2+16n+3}+\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{n^2+16n+3}+\sqrt{n^2+2}}$

$$= \frac{\left(n^2+16n+3\right)-\left(n^2+2\right)}{\sqrt{n^2+16n+3}+\sqrt{n^2+2}}$$

$$= \frac{16n+1}{\sqrt{n^2+16n+3}+\sqrt{n^2+2}}$$

หา $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ในรูปเศษส่วน เราสามารถตัดตัวดีกรีน้อยที่บวกลบอยู่ได้ $\rightarrow$

เหลือ $\frac{16n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}} = \frac{16n}{n+n} = \frac{16n}{2n} = 8$ ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{a_n} = \sqrt[3]{8} = 2$

21. ตอบ : 2

วิธีทำ สมการจำนวนเต็ม ต้องจัดฝั่งหนึ่ง เป็นตัวเลข และแยกตัวประกอบอีกฝั่ง $\rightarrow xy-y+4x=21$

เติม -4 ทั้งสองฝั่ง เพื่อให้ฝั่งซ้ายแยกตัวประกอบได้ $xy-y+4x-4 = 21-4$

$$y(x-1)+4(x-1) = 17$$

$$(y+4)(x-1) = 17$$

จะเห็นว่า 17 แยกเป็นจำนวนเต็ม 2 จำนวนคูณกันได้แค่ $(1)(17),(-1)(-17),(17)(1),$ $(-17)(-1)$ ทั้งหมด 4 แบบ และแต่ละแบบจับเท่ากับ $(y+4)(x-1)$ จะได้ค่า x กับ y ทั้งหมด 4 ชุด เนื่องจากข้อนี้ไม่ได้ถามค่า x,y แต่ถามจำนวน (x,y) ดังนั้น จะได้คำตอบคือ 4

22. ตอบ : 3

วิธีทำ ทำนายเกี่ยวกับเวลา และมีข้อมูล 5 ชุด เราจะให้ตรงกลางเป็น 0 ให้สมการการทำนายคือ $\hat{y}=c+mx$ (โจทย์ใช้ตัวแปร a ไปแล้ว จึงต้องเปลี่ยนไปใช้ตัวแปรชื่ออื่น)

X	-2	-1	0	1	2
y	1.2	2.6	a	5.4	6.3

ดังนั้น $\sum y = nc + m\sum x$

$\sum xy = c\sum x + m\sum x^2$

และในการทำนายเกี่ยวกับเวลา จะได้ $\sum x = 0$ เสมอ (เช่น $(-2)+(-1)+0+1+2=0$)

จะเหลือระบบสมการคือ $\sum y = nc \quad \ldots(1)$

$$\sum xy = m\sum x^2 \quad \ldots(2)$$

$\sum y$ จะหาไม่ได้ เพราะไม่รู้ a แต่ตัวอื่นใน (2) จะหาได้เพราะ a จะคูณกับ 0 แล้วกลายเป็น 0

จะได้ $\sum xy = (-2)(1.2)+(-1)(2.6)+(0)(a)+(1)(5.4)+(2)(6.3)$

$$= (-2.4)+(-2.6)+0+5.4+12.6$$

$$
\begin{aligned}
&= 13 \\
\sum x^2 &= (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 \\
&= 4 + 1 + 0 + 1 + 4 \\
&= 10
\end{aligned}
$$

แทนใน (2) จะได้ $13 = m(10) \rightarrow m = 1.3$

จากที่โจทย์ให้ พ.ศ. 2557 จะมี $x = 2557 - 2552 = 5$ และ $1{,}028{,}000 = 10.28$ แสนคน
ดังนั้น $10.28 = c + mx = c + 1.3(5)$ จะได้ $c = 10.28 - 1.3(5) = 10.28 - 6.5 = 3.78$
แทน $c = 3.78$ กลับไปใน (1) โดย $n = 5$ จะได้ $\sum y = 5(3.78) = 18.9$
ดังนั้น $a = 18.9 - (1.2 + 2.6 + 5.4 + 6.3) = 18.9 - 15.5 = 3.4$ แสนคน

23. ตอบ : 4

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
3(\sin x \cos y - \cos x \sin y) &= 2(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \\
3\sin x \cos y - 3\cos x \sin y &= 2\sin x \cos y + 2\cos x \sin y \\
\sin x \cos y &= 5\cos x \sin y \\
\frac{\sin x \cos y}{\cos x \sin y} &= 5 \\
\tan x \cot y &= 5 \\
\tan^3 x \cot^3 y &= 5^3 \\
&= 125
\end{aligned}
$$

24. ตอบ : 2

วิธีทำ ก. สบบ.ควอไทล์ $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{2} = 20$ ดังนั้น $Q_3 - Q_1 = 40 \quad \ldots(1)$

และ สปส.สบบ.ควอไทล์ $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \dfrac{2}{3}$ แทนค่าจาก (1) จะได้ $\dfrac{40}{Q_3 + Q_1} = \dfrac{2}{3}$ ดังนั้น

$Q_3 + Q_1 = 60 \quad \ldots(2)$ $\dfrac{(1)+(2)}{2}$ จะได้ $Q_3 = 50$ แทนใน (2) จะได้ $Q_1 = 10$

ดังนั้น มีข้อมูลระหว่าง $Q_1(=10)$ กับ $Q_3(=50)$ อยู่ 2 ควอเตอร์ ซึ่งคิดเป็น 50% $\rightarrow$ ***ก. ถูก***

ข. ผลรวมคะแนนชาย $= (20)(32) = 640$, ผลรวมคะแนนหญิง $= (40)(20) = 800$

มีคนทั้งหมด $20 + 40 = 60$ คน ดังนั้น $\bar{x}_{\text{รวม}} = \dfrac{640 + 800}{60} = 24$

ดังนั้น ความแปรปรวนรวม $= \dfrac{\sum(x_i - 24)^2}{60} \quad \ldots(*)$

เราจะแยกหา $\sum(x_i - 24)^2$ ของกลุ่ม ชาย กับ หญิง แล้วค่อยเอามาบวกกัน

กลุ่มชาย : ทั้ง 20 คน ได้ 32 หมดทุกคน $\rightarrow \sum_{\text{ช}}(x_i - 24)^2 = 20(32-24)^2 = 20(64) = 1280$

กลุ่มหญิง : ความแปรปรวนหญิง $= 90$

$$\text{ดังนั้น } \frac{\sum_{\text{ญ}}(x_i - \bar{x}_{\text{ญ}})^2}{N_{\text{ญ}}} = \frac{\sum_{\text{ญ}}(x_i - 20)^2}{40} = 90 \rightarrow \sum_{\text{ญ}}(x_i - 20)^2 = 3600$$

เนื่องจากเราต้องหา $\sum_{\text{ญ}}(x_i - 24)^2$ มารวมกับของกลุ่มชาย เพื่อแทนใน $(*)$ เราจะกระจาย $\sum_{\text{ญ}}(x_i - 20)^2$ และจัดรูปให้เป็นตัวที่เราต้องการ ดังนี้

$$\sum_{\text{ญ}}\left(x_i^2 - 2(20)x_i + 20^2\right) = 3600$$

$$\sum_{\text{ญ}}\left(x_i^2 - 2(24)x_i + 24^2\right) = 3600 \overbrace{- \sum_{\text{ญ}}2(4)x_i - \sum_{\text{ญ}}20^2 + \sum_{\text{ญ}}24^2}^{\text{เติมทั้ง 2 ฝั่ง ให้ฝั่งซ้ายจัดรูปได้ตัวที่เราต้องการ}}$$

$$\sum_{\text{ญ}}(x_i - 24)^2 = 3600 - 8\sum_{\text{ญ}}x_i + \sum_{\text{ญ}}\left(24^2 - 20^2\right)$$

$\sum_{\text{ญ}}x_i =$ ผลรวมคะแนนกลุ่มหญิง $= 800$

และ $\sum_{\text{ญ}}\left(24^2 - 20^2\right) = \sum_{\text{ญ}}(24-20)(24+20) = \sum_{\text{ญ}}(4)(44) = 40(4)(44)$ (เพราะมี ญ 40 คน)

ดังนั้น $\sum_{\text{ญ}}(x_i - 24)^2 = 3600 - 8(800) + 40(4)(44) = 3600 - 6400 + 7400 = 4240$

รวมกับ 1280 ของกลุ่มชาย แทนใน $(*)$ จะได้ $S_{\text{รวม}} = \dfrac{1280 + 4240}{60} = \dfrac{5520}{60} = 92 \rightarrow$ ***ข. ผิด***

<u>หมายเหตุ</u> : จะใช้สูตร $S^2_{\text{รวม}} = \dfrac{N_{\text{ช}}\left(S^2_{\text{ช}} + (\bar{x}_{\text{ช}} - \bar{x}_{\text{รวม}})^2\right) + N_{\text{ญ}}\left(S^2_{\text{ญ}} + (\bar{x}_{\text{ญ}} - \bar{x}_{\text{รวม}})^2\right)}{N_{\text{ช}} + N_{\text{ญ}}}$ ก็ได้

กลุ่มชาย ทุกคนเท่ากัน ดังนั้น $S_{ช}^2 = 0$ จะได้

$$S_{รวม}^2 = \frac{20\left(0+(32-24)^2\right)+40\left(90+(20-24)^2\right)}{20+40}$$
$$= \frac{1280+4240}{60}$$
$$= 92$$

25. ตอบ : 1

วิธีทำ ก. ความกว้างชั้นไม่เท่ากัน ต้องใช้ $\frac{\text{จำนวนคน}}{\text{ความกว้างชั้น}}$ เป็นตัววัดระดับความหนาแน่น ว่าชั้นไหนได้รับความนิยมสูงสุด

เงิน	คน	ขอบล่าง	ขอบบน	กว้าง	ความนิยม
10,000 - 19,999	5	9,999.5	19,999.5	10,000	5/10,000 = 0.0005
20,000 - 29,999	10	19,999.5	29,999.5	10,000	10/10,000 = 0.0010
30,000 – 49,999	25	29,999.5	49,999.5	20,000	25/20,000 = 0.00125
50,000 – 59,999	10	49,999.5	59,999.5	10,000	10/10,000 = 0.0010

ลบกัน $= d_1$

ลบกัน $= d_2$

ชั้น 3 หนาแน่นสุด ดังนั้น ฐานนิยมอยู่ชั้น 3

และจะได้ $d_1 = 0.00125 - 0.0010 = 0.00025$

$d_2 = 0.00125 - 0.0010 = 0.00025$

ฐานนิยม $= L + \left(\frac{d_1}{d_1+d_2}\right)I$

$$= 29999.5 + \left(\frac{0.00025}{0.00025+0.00025}\right)(20000)$$
$$= 29999.5 + \left(\frac{1}{2}\right)(20000)$$
$$= 39999.5 \rightarrow$$ ***ก. ถูก***

ข. มัธยฐาน อยู่ตำแหน่งที่ $\frac{50}{2} = 25$

สร้างช่องความถี่สะสม $(F) \rightarrow$ เกิน $25(=40)$ ที่ชั้นที่ 3

ดังนั้น มัธยฐานอยู่ชั้นที่ 3

เงินเดือน (บาท)	จำนวนพนักงาน (คน)	F
10,000 – 19,999	5	5
20,000 – 29,999	10	15
30,000 – 49,999	25	40
50,000 – 59,999	10	50

มัธยฐาน $= L + \left(\frac{\text{ตำแหน่ง} - F_L}{f_m}\right)I$

$$= 29999.5 + \left(\frac{25-15}{25}\right)(49999.5 - 29999.5)$$
$$= 29999.5 + \left(\frac{10}{25}\right)(20000) = 37999.5 \rightarrow$$ ***ข. ถูก***

26. ตอบ : 4

วิธีทำ จะได้ $a_2 = 3a_1 + 1 = 3(2) + 1$

$$a_3 = 3a_2 + 1 = 3(3(2)+1)+1 \qquad = 2(3^2) + 3 + 1$$

$$a_4 = 3a_3 + 1 = 3(2(3^2)+3+1)+1 \qquad = 2(3^3) + 3^2 + 3 + 1$$

$$a_5 = 3a_4 + 1 = 3(2(3^3)+3^2+3+1)+1 = 2(3^4) + 3^3 + 3^2 + 3 + 1$$

จะเห็นว่า $a_i = 2(3^{i-1}) + 3^{i-2} + 3^{i-3} + \ldots + 3 + 1$

$$= 2(3^{i-1}) + \frac{3^{i-2} - (1)\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - \frac{1}{3}}$$ อนุกรมเรขา $= \frac{a_1 - a_n r}{1-r}$

$$= 2(3^{i-1}) + \frac{3^{i-1} - 1}{2} = \frac{5(3^{i-1}) - 1}{2}$$

จะได้ $S_n = \sum a_i = \sum \frac{5(3^{i-1}) - 1}{2} = \frac{5\sum 3^{i-1} - \sum 1}{2} \quad \ldots(*)$

โดยที่ $\sum 3^{i-1} = 1 + 3 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{1 - (3^{n-1})(3)}{1-3} = \frac{3^n - 1}{2}$ และ $\sum 1 = (1)(n) = n$

แทนใน $(*)$ จะได้ $S_n = \frac{5\left(\frac{3^n-1}{2}\right) - n}{2} \rightarrow$ คูณ 4 ตลอด ได้ $4S_n = 5(3^n) - 5 - 2n \rightarrow$ ***ตอบข้อ 4***

27. ตอบ : 2

วิธีทำ ต้องจัดรูป $(A+B)^{-1}$ ให้มี A^{-1} กับ B^{-1} ในลักษณะคล้ายๆ ตัวเลือกทั้ง 4 โดยจะต้องทำให้ดึงตัวร่วมได้ โดยจะใช้สมบัติว่า $X = XI = IX$ และ $AA^{-1} = I = A^{-1}A, BB^{-1} = I = B^{-1}B$ ดังนี้

$$(A+B)^{-1} = (\ A\ I \ + \ I\ B\ )^{-1} \qquad \text{(สมบัติของ } I\text{)}$$

$$= \left(A(B^{-1}B) + (AA^{-1})B\right)^{-1} \qquad \text{(สมบัติของอินเวอร์ส)}$$

$$= \left(AB^{-1}B + AA^{-1}B\right)^{-1} \qquad \text{(เมทริกซ์เปลี่ยนกลุ่มการคูณได้)}$$

$$= \left(A(B^{-1}B + A^{-1}B)\right)^{-1} \qquad \text{(ดึงตัวร่วม } A \text{ ทางซ้าย)}$$

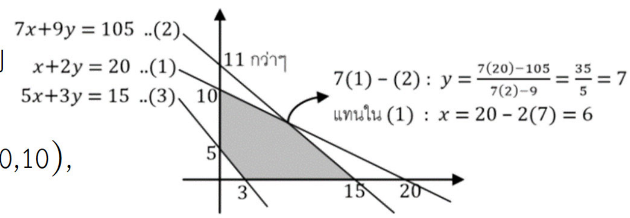
$$= \left(A(B^{-1} + A^{-1})B\right)^{-1} \qquad \text{(ดึงตัวร่วม } B \text{ ทางขวา)}$$

$$= B^{-1}\left(B^{-1} + A^{-1}\right)^{-1} A^{-1} \qquad \text{(กระจายอินเวอร์ส ต้องสลับตำแหน่ง)}$$

เมทริกซ์สลับที่การบวกได้ $\rightarrow$ ***จะได้ตรงกันกับข้อ 2***

28. ตอบ : 1

วิธีทำ หาจุดตัดแกน
และวาดกราฟคร่าวๆ จะได้ดังรูป
หาจุดมุม $\rightarrow$ แก้ (1) กับ (2)
จะได้จุดมุมคือ $(6,7),(0,5),(0,10),$
$(3,0),(15,0)$



จาก $3A=2B \rightarrow A=\frac{2}{3}B$

ดังนั้น $P=\left(\frac{2}{3}B\right)x+By=\left(\frac{2x}{3}+y\right)B \rightarrow$ เอาแต่ละจุดไปแทน แล้วดูว่ามากสุด, น้อยสุด ได้เท่าไหร่

$(6,7) \rightarrow P=(4+7)B=11B$
$(0,5) \rightarrow P=(0+5)B=5B$
$(0,10) \rightarrow P=(0+10)B=10B$
$(3,0) \rightarrow P=(2+0)B=2B$
$(15,0) \rightarrow P=(10+0)B=10B$

เนื่องจาก B เป็นบวก ดังนั้น มากสุด $M=11B$, น้อยสุด $N=2B$ จะได้ $\frac{M}{N}=\frac{11B}{2B}=\frac{11}{2} \rightarrow$ คูณไขว้จะได้ $2M=11N \rightarrow$ ***ตอบ 1***

29. ตอบ : 4

วิธีทำ จะได้ว่า e ต้องหารด้วย 5,4,3,2 ลงตัว $\rightarrow$ e น้อยสุด $=$ ค.ร.น. ของ $5,4,3,2=60$
แทนค่า $e=60$ ใน $5a=4b=3c=2d=e$ จะได้ $a=12, b=15, c=20, d=30$
เนื่องจาก สปส ในสมการเป็นบวกหมด ดังนั้น ถ้า e มากกว่านี้ จะทำให้ได้ a,b,c,d ที่มากกว่านี้ ซึ่งจะทำให้ $a+2b+3c+4d+5e$ มากยิ่งขึ้น ดังนั้น $e=60$ จะได้ผลบวกดังกล่าวน้อยที่สุด ดังนั้น $a+4b+3c+4d+e=12+4(15)+3(20)+4(30)+60=312$

30. ตอบ : 2

วิธีทำ A,B,C,D จะใช้เลขคี่ไป 4 ตัว และ E,F,G จะใช้เลขคู่ไป 3 ตัว ดังนั้น จะเหลือ คี่ 1 ตัว กับ คู่ 2 ตัว ให้ H,I,J
เนื่องจาก A,B,C,D ต้องเรียงติดกันด้วย $\rightarrow$ เลขคี่ที่เหลือให้ H,I,J จะเป็นได้แค่ 1 หรือ 9 เท่านั้น
E,F,G ต้องเรียงติดกันด้วย $\rightarrow$ เลขคู่ที่เหลือให้ H,I,J จะเป็นได้แค่ 0,2 หรือ 6,8 หรือ 0,8 เท่านั้น จับกลุ่ม H,I,J ที่บวกกันได้ 15 จะมีแค่ $1+6+8$ เท่านั้น
จะได้ $(H,I,J)=(8,6,1)$ และ $(A,B,C,D)=(9,7,5,3)$ และ $(E,F,G)=(4,2,0)$
ดังนั้น $C+F+I=5+2+6=13$

31. ตอบ : 4

วิธีทำ $\sqrt{14+3x-x^2} = 1+\sqrt{9+5x-x^2}$

$$14+3x-x^2 = 1+2\sqrt{9+5x-x^2}+9+5x-x^2$$

$$4-2x = 2\sqrt{9+5x-x^2}$$

$$2-x = \sqrt{9+5x-x^2}$$

$$4-4x+x^2 = 9+5x-x^2$$

$$2x^2-9x-5 = 0$$

$$(2x+1)(x-5) = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}, 5$$

ตรวจคำตอบ $x = -\frac{1}{2}$: $\sqrt{14-\frac{3}{2}-\frac{1}{4}}-\sqrt{9-\frac{5}{2}-\frac{1}{4}} = \frac{7}{2}-\frac{5}{2} = 1 \rightarrow$ **จริง**

$x = 5$: $\sqrt{14+15-25}-\sqrt{9+25-25} = 2-3 = -1 \rightarrow$ ***ไม่จริง***

แทนในที่โจทย์ถาม จะได้ $= \left|\frac{4+24+36}{12+4}\right| = \left|\frac{64}{16}\right| = 4$

32. ตอบ : 5

วิธีทำ จากสมบัติของ $\bar{z}$ จะได้ $z\cdot\bar{z} = |z|^2$

ถ้าแทน $|z|^2$ ในสมการด้วย $z\cdot\bar{z}$ จะดึง z เป็นตัวร่วมได้ $3z\cdot\bar{z}-(28-i)z+4z^2 = 0$

$$z(3\bar{z}-28+i+4z) = 0$$

จะได้ $z = 0$ หรือ $3\bar{z}-28+i+4z = 0$

$$3(x-yi)-28+i+4(x+yi) = 0$$

$$3x-3yi-28+i+4x+4yi = 0$$

$$(7x-28)+(y+1)i = 0$$

$$x = 4 \text{ และ } y = -1$$

จะได้คำตอบสองค่า คือ $z = 0, 4-i$

จะได้ $z+i = i, 4$ ดังนั้น $|z+i| = 1, 4$ ดังนั้น ผลบวกสมาชิกใน $B = 1+4 = 5$

33. ตอบ : 2

วิธีทำ จาก $A+B+C=180^{\circ}$ และ $B=45^{\circ}$ จะเหลือ $A+C=135^{\circ}$ ดังนั้น $A=135^{\circ}-C$ ...(*)

จาก $\sqrt{2}c=\left(\sqrt{3}-1\right)a$ จะได้ $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ ...(1)

แต่จากกฎของ sin จะได้ $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sin C}{\sin A}=\dfrac{\sin C}{\sin\left(135^{\circ}-C\right)}$

$$=\frac{\sin C}{\sin 135^{\circ}\cos C-\cos 135^{\circ}\sin C}=\frac{\sin C}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos C+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin C}$$

ดึงตัวร่วม ให้ $\sin C$ มาตัดกัน จะได้ $=\dfrac{\sin C}{\sqrt{\frac{2}{2}}\sin C\left(\frac{\cos C}{\sin C}+1\right)}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\left(\cos C+1\right)}$ ...(2)

ใช้ $\dfrac{c}{a}$ เป็นตัวเชื่อม (1) กับ (2) จะได้ $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\left(\cos C+1\right)}\rightarrow \cos C+1=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$

ดังนั้น $\cot C=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}-1=\dfrac{2-\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\rightarrow$ ดึง $\sqrt{3}$ จากเศษ จะได้ $=\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}$

เนื่องจาก $0<C<180^{\circ}$ และ $\cot C=\sqrt{3}$ จะได้ $C=30^{\circ}$ แทนใน (*) จะได้ $A=105^{\circ}$

แทนในที่โจทย์ถาม จะได้ $=\cos^2 30^{\circ}+\cos^2 45^{\circ}+\cos^2 30^{\circ}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{4}=2$

34. ตอบ : 5

วิธีทำ เปลี่ยนตัวแปรก่อน ให้ $x^2+x=k$ จะได้ $2x^2+2x=2k\rightarrow$ สมการกลายเป็น

$\log_3\left(3^{2k}+9\right)=k+\dfrac{1}{\log 3}$ และ $\dfrac{1}{\log 3}=\dfrac{1}{\log_{10}3}=\log_3 10$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ } \log_3\left(3^{2k}+9\right) &= k+\log_3 10\\
3^{2k}+9 &= 3^{k+\log_3 10}\\
3^{2k}+9 &= 3^{k}\cdot 3^{\log_3 10}\\
3^{2k}+9 &= 3^{k}\cdot 10\\
3^{2k}-10\cdot 3^{k}+9 &= 0\\
\left(3^{2k}-9\right)\left(3^{k}-1\right) &= 0 \qquad k=2,\,0
\end{aligned}$$

ตรวจคำตอบ จะได้ว่า ทั้ง 2 และ 0 ทำให้หลัง log เป็นบวก และได้สมการที่เป็นจริง

แทนกลับไปหา x จะได้ $x^2 + x = 2$

$$x^2 + x - 2 = 0 \qquad\Big|\qquad x^2 + x = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0 \qquad\Big|\qquad (x)(x+1) = 0$$

$$x = -2, 1 \qquad\Big|\qquad x = 0, -1$$

ดังนั้น $B = \{4,1,0,1\} \rightarrow$ ซ้ำคิดเป็นสมาชิกแค่ตัวเดียว $\rightarrow \{4,1,0\} \rightarrow$ ***ตอบ*** $4+1+0=5$

35. ตอบ : 3

วิธีทำ $2^1 \cdot 2^{3\sin x} - 5 \cdot 2^2 \cdot 2^{\sin x} - 1 = 0$

$$2\left(2^{\sin x}\right)^3 - 5\left(2^{\sin x}\right)^2 + 4\left(2^{\sin x}\right) - 1 = 0$$

เปลี่ยนตัวแปร ให้ $k = 2^{\sin x}$

$$2k^3 - 5k^2 + 4k - 1 = 0$$

แยกตัวประกอบด้วยทฤษฎีเศษ แทน $k = \pm 1, \pm \frac{1}{2}$ จะเห็นว่า $k = 1$ จะได้ $2-5+4-1=0$

1	2	-5	4	-1
		2	-3	1
	2	-3	1	0

หารสังเคราะห์ จะแยกได้ $(k-1)\left(2k^2 - 3k + 1\right) = 0$

$$(k-1)(2k-1)(k-1) = 0$$

$$k = 1, \frac{1}{2}$$

แทนค่า k กลับไปเป็น $x \in [0, 2\pi]$ จะได้ $2^{\sin x} = 1 \qquad\Big|\qquad 2^{\sin x} = \frac{1}{2}$

$$\sin x = 0 \qquad\Big|\qquad \sin x = -1$$

$$x = 0, \pi \qquad\Big|\qquad x = \frac{3\pi}{2}$$

ดังนั้น A มีสมาชิก 3 ตัว

36. ตอบ : 153

วิธีทำ $\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta + 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 0$

$$4\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta - 4\sin^3\theta = 0$$

$$2\sin\theta - \sin\theta\cos\theta - 2\sin^3\theta = 0$$

$$\sin\theta\left(2 - \cos\theta - 2\sin^2\theta\right) = 0$$

$$\sin\theta\left(2 - \cos\theta - 2\left(1 - \cos^2\theta\right)\right) = 0$$

$$\sin\theta\left(2 - \cos\theta - 2 + 2\cos^2\theta\right) = 0$$

$$\sin\theta\left(2\cos^2\theta - \cos\theta\right) = 0$$

$$\sin\theta(\cos\theta)(2\cos\theta - 1) = 0$$

เนื่องจาก $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $\sin\theta$ กับ $\cos\theta$ จะไม่มีทางเป็น 0 ได้ ดังนั้น $2\cos\theta - 1 = 0$

จะได้ $\cos\theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = 60^\circ$

ดังนั้น $a = \frac{\tan 60^\circ - \tan 120^\circ}{\cos 60^\circ - \cos 120^\circ} = \frac{\sqrt{3} - \left(-\sqrt{3}\right)}{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{3}$

$$b = \frac{\sin 180^\circ + \sin 240^\circ + \sin 300^\circ}{\cos 180^\circ + \cos 240^\circ + \cos 300^\circ} = \frac{0 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{(-1) + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$

ดังนั้น $a^4 + b^4 = \left(2\sqrt{3}\right)^4 + \left(\sqrt{3}\right)^4 = 144 + 9 = 153$

37. ตอบ : 3

วิธีทำ จะได้ $a_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} \rightarrow$ เป็นอนุกรมเรขาดัดแปลง ต้องใช้เอาตัวมันเองมาหักกับตัวมันเอง ดังนี้

$$a_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} \quad \ldots(1)$$

คูณ 2 ตลอด และเลื่อนให้ตัวส่วนตรงกับสมการแรก

$$2a_n = 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^{n-1}} \quad \ldots(2)$$

$$(2)-(1): a_n = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$$

อนุกรมเรขา $= \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$

$$a_n = \frac{(1)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n}$$

$$a_n = 2 - \frac{2}{2^n} - \frac{n}{2^n}$$

จะได้ $2^n\left(6-3a_n\right) = 2^n\left(6-3\left(2-\frac{2}{2^n}-\frac{n}{2^n}\right)\right) = 2^n\left(6-6+\frac{6}{2^n}+\frac{3n}{2^n}\right) = 6+3n$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n\left(6-3a_n\right)}{\sqrt{n^2+5n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6+3n}{\sqrt{n^2+5n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} 3 = 3$

38. ตอบ : 12

วิธีทำ จะได้ $f(1) = 1+a+b$ และจาก $f(1) = 2$ จะได้ $1+a+b = 2 \rightarrow a+b = 1 \ldots(*)$

จะได้ $(f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(0+0+b) = f(b) = b^2 + ab + b = b(b+a) + b$

$= b(\ 1\ ) + b$

$= 2b$

และจาก $(f \circ f)(0) = 10$ จะได้ $2b = 10 \rightarrow b = 5$ แทนใน $(*)$ จะได้ $a = -4$

ดังนั้น $\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{2} x^2 - 4x + 5dx = \frac{x^3}{3} - 2x + 5x\Big|_{-1}^{2}$

$= \left(\frac{8}{3} - 8 + 10\right) - \left(-\frac{1}{3} - 2 - 5\right) = 12$

39. **ตอบ : 8**

วิธีทำ จาก $(2): \frac{n}{a} \in (0,1]$ จะได้ $0 < \frac{n}{a} \le 1$ คูณ a ตลอด ได้ $0 < n \le a$ $\quad\ldots(5)$

จาก $(3): \frac{a}{b} \in (1,2]$ จะได้ $0 < \frac{a}{b} \le 2$ คูณ b ตลอด ได้ $b < a \le 2b$ $\quad\ldots(6)$

จาก $(4): \frac{b}{n} \in (2,3]$ จะได้ $2 < \frac{b}{n} \le 3n$ คูณ n ตลอด ได้ $2n < b \le 3n$ $\quad\ldots(7)$

จะเห็นว่า ถ้า (6) กับ (7) จริง จะทำให้ (5) จริงเสมออยู่แล้ว

เพราะจาก (7) จะได้ $2n < b$ และจาก (6) จะได้ $b < a$ ดังนั้น $2n < a$ แต่ $n < 2n$ ดังนั้น $n < a$ ซึ่งทำให้เงื่อนไข(5)จริงเสมอ ดังนั้น เราทำให้(6)กับ(7)จริงก็พอ ไม่ต้องสนใจ(5)

จาก (6) ค่า a จะเป็นได้ตั้งแต่ $b+1, b+2, b+3, \ldots, 2b$ ซึ่งมีทั้งหมด $= \frac{\text{ปลาย}-\text{ต้น}}{\text{ห่าง}} + 1$

$= \frac{2b-(b+1)}{1} + 1$

$= b$ แบบ

ดังนั้น b แต่ละค่า จะมี a ที่สอดคล้องอยู่ b แบบ$\ldots(*)$

จาก (7) ค่า b จะเป็นไปได้ตั้งแต่ $2n+1, 2n+2, 2n+3, \ldots, 3n$

จาก $(*)$: ถ้า $b = 2n+1$ จะมี a ที่สอดคล้อง $= 2n+1$ แบบ

ถ้า $b = 2n+2$ จะมี a ที่สอดคล้อง $= 2n+2$ แบบ

$\vdots$

ถ้า $b = 3n$ จะมี a ที่สอดคล้อง $= 3n$ แบบ

จำนวนพจน์ $= \frac{\text{ปลาย}-\text{ต้น}}{\text{ห่าง}} + 1 = \frac{3n-(2n+1)}{1} + 1 = n$

รวมทุกๆ แบบจาก b ในทุกๆ กรณี จะได้ $= (2n+1) + (2n+2) + \ldots + 3n$

แทนในสูตร $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$= \frac{n}{2}(2n+1+3n)$

$= \frac{n}{2}(5n+1)$

โจทย์ต้องการให้จำนวนแบบ $= 164$ ดังนั้น $\frac{n}{2}(5n+1) = 164$

$5n^2 + n - 328 = 0$

$(5n+41)(n-8) = 0$

แต่ n ต้องเป็นเต็มบวก $\rightarrow n = 8$

40. ตอบ : 21

วิธีทำ จาก $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$ จะได้ $\frac{a+3+5+7+b}{5} = 7 \rightarrow a+b = 20 \ \ldots(1)$

จาก $s = \sqrt{\frac{\sum x_i}{N} - \bar{x}^2}$ จะได้ $\sqrt{\frac{a^2+3^2+5^2+7^2+b^2}{5} - 7^2} = 2\sqrt{10}$

$$\frac{a^2+83+b^2}{5} - 49 = 40$$

$$a^2 + b^2 = 5(89) - 83 = 362 \ \ldots(2)$$

จาก (1) จะได้ $a = 20 - b$ แทนใน (2) จะได้ $(20-b)^2 + b^2 = 362$

$$400 - 40b + b^2 + b^2 = 362$$

$$b^2 - 20b + 19 = 0$$

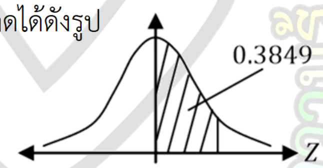
$$(b-1)(b-19) = 0$$

แต่ b เรียงอยู่หลัง 7 ดังนั้น $b > 7$ ดังนั้น $b = 19$ ได้ค่าเดียว $\rightarrow$ แทนใน (1) จะได้ $a = 1$

ดังนั้น $2a + b = 2(1) + 19 = 21$

41. ตอบ : 15.87

วิธีทำ วิชาคณิตศาสตร์ : $P_{88.49}$ จะเลย P_{50} ไป 38.49% จะวาดได้ดังรูป



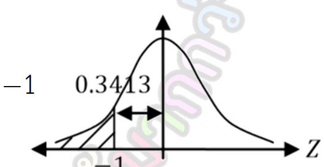
เปิดตาราง จะได้ $z = 1.2$

วิชาคณิตศาสตร์ มี $\bar{x} = 63, s = \sqrt{25} = 5$

แปลงกลับเป็น x ด้วยสูตร $\frac{x - \bar{x}}{s} = z$ จะได้ $\frac{x-63}{5} = 1.2 \rightarrow x = 6 + 63 = 69$

ดังนั้น วิชาภาษาอังกฤษ ได้คะแนน 69 คะแนนด้วย

ภาษาอังกฤษ มี $\bar{x} = 72, s = \sqrt{9} = 3$ ดังนั้น $z = \frac{69-72}{3} = -1$



Z เป็นลบ จะอยู่ทางซ้าย

ต้องเปิดตารางที่ $z = 1$ ได้พื้นที่ $= 0.3413$ แล้วสะท้อนมาทางซ้าย ดังรูป

จะเหลือพื้นที่ทางฝั่งซ้าย $= 0.5 - 0.3413 = 0.1587$

ดังนั้น มีคนได้อังกฤษน้อยกว่านักเรียนคนนี้ 15.87% $\rightarrow$ คะแนนอังกฤษของเขา $=$ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 15.87

42. ตอบ : 100

วิธีทำ อินทิเกรต $f''(x)$ จะได้ $f'(x)=3x+3x^2+c \;\ldots(1)$

จากความชันที่ $x=2$ คือ 20 ดังนั้น $f'(2)=20$ แทนใน (1) จะได้ $3(2)+3(2^2)+c=20$

แก้สมการ จะได้ $c=2$ แทนใน (1) จะได้ $f'(x)=3x+3x^2+2$

อินทิเกรต $f'(x)$ ต่ออีกรอบ ได้ $f(2)=22$ แทนใน (2) จะได้ $\frac{3(2^2)}{2}+2^3+2(2)+d=22$

แก้สมการ จะได้ $d=4$ แทนใน (2) จะได้ $f(x)=\frac{3x^2}{2}+x^3+2x+4$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\frac{3(4^2)}{2}+4^3+2(4)+4=24+64+8+4=100$

43. ตอบ : 721

วิธีทำ จาก $f(3)=0$ จะได้ $3^3+a(3^2)+b(3)+3=0 \to \div 3$ ตลอด แล้วจัดรูปได้

$3a+b+10=0 \;\ldots(1)$ จากเศษ 5 ใช้ทฤษฎีเศษจะได้ $f(2)=5$ ดังนั้น

$2^3+a(2^2)+b(2)+3=5$ ย้าย 5 มาลบ, $\div 2$ ตลอด แล้วจัดรูปได้ $2a+b+3=0 \;\ldots(2)$

$(1)-(2)$: $a+7=0 \to a=-7$ แทนใน (2) จะได้ $b=-3-2(-7)=11$

ดังนั้น $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g\left(1^3-7(1^2)+11(1)+3\right)=g(8)=11(8^2)+3(8)-7$

$=704+24-7=721$

44. ตอบ : 22

วิธีทำ หาสูตรพจน์ทั่วไปของหน้าที่มีคำผิดก่อน โดยคำว่า “เว้นไป k หน้า” จะเหมือนกับ “ถัดไป $k+1$ หน้า”

ผิดคำแรกที่หน้าที่ 1 $\to a_1=1 \qquad =1$

เว้น 1 หน้า = ถัดไป 2 หน้า = หน้าที่ $1+2=3$ $\to a_2=1+2 \qquad =1+2(1)$

เว้น 3 หน้า = ถัดไป 4 หน้า = หน้าที่ $1+2+4=7$ $\to a_3=1+2+4 \qquad =1+2(1+2)$

เว้น 5 หน้า = ถัดไป 6 หน้า = หน้าที่ $1+2+4+6=13$ $\to a_4=1+2+4+6=1+2(1+2+3)$

จะได้ $a_n=1+2(1+2+3+\ldots+n-1)=1+2\left(\frac{(n-1)((n-1)+1)}{2}\right)=1+(n-1)(n)$

แต่หนังสือมีแค่ 500 หน้า เราต้องหา n ที่มากที่สุด ที่ $a_n\le 500$

แทนสูตร a_n จะได้ $1+(n-1)(n)\le 500 \to (n-1)(n)\le 499$

จะเห็นว่า $n-1$ กับ n เป็นสองจำนวนเรียงติดกัน และจาก $\sqrt{499} \sim \sqrt{500} = 10\sqrt{5} \sim (10)(2.23) = 22.3$

ดังนั้น สองจำนวนเรียงติดกันมากสุดที่คูณกันแล้ว ≤ 499 จะอยู่แถวๆ 22.3

ลองคูณ $(22)(23)$ จะได้ $506 \rightarrow$ เกิน

$(21)(22)$ จะได้ $462 \rightarrow$ ใช้ได้ ดังนั้น $(n-1)(n)$ คือ $(21)(22)$ จะได้ $n = 22$

ดังนั้น n มากสุด ที่ $a_n \leq 500$ คือ $n = 22$ ดังนั้น จะมีคำผิดได้ 22 คำ

45. **ตอบ : 152**

วิธีทำ ให้มีสีขาว แดง เหลือง $= W, R, Y$ ลูก ตามลำดับ

จากข้อมูลที่โจทย์ให้ จะได้ $W \geq R$ และ $W \leq \frac{Y}{3}$ และ $W + R \geq 76$ โดยโจทย์ถามว่า $W + Y \geq ?$

จาก $W \geq R$ จะได้ $W - R \geq 0$ เอามาบวกกับสมการ $W + R \geq 76$ จะได้ $2W \geq 76 \rightarrow W \geq 38$

และจาก $W \leq \frac{Y}{3}$ จะได้ $Y \geq 3W \geq 3(38) = 114$ ดังนั้น $W + Y \geq 38 + 114 = 152$

และจะเห็นว่า $W = 38,\ Y = 114,\ R = 38$ สามารถทำให้ทุกเงื่อนไขในโจทย์เป็นจริงได้

ดังนั้น สีขาวกับสีเหลืองรวมกัน ต้องมีอย่างน้อย 152 ลูก