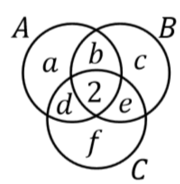
เฉลย

1. 3	11. 3	21. 4	31. 5	41. 38
2. 2	12. 2	22. 1	32. 54	42. 634
3. 1	13. 2	23. 1	33. 681	43. 35
4. 4	14. 1	24. 3	34. 3	44. 2750
5. 3	15. 3	25. 4	35. 9	45. 384
6. 1	16. 1	26. 4	36. 500	
7. 3	17. 2	27. 2	37. 1704	
8. 1	18. 3	28. 2	38. 340	
9.* 4	19. 2	29. 3	39. 109	
10. 1	20. 4	30. 4	40. 7	

แนวคิด

1. **ตอบ : 3**

วิธีทำ จาก $n(A\cap B\cap C)=2$ จะได้ตรงกลาง $=2$



จาก $n(A-B)=8$ จะได้ $a+d=8$ ...(1)

$n(B-C)=4$ จะได้ $b+c=4$ ...(2)

$n(A-C)=9$ จะได้ $a+b=9$ ...(3)

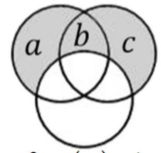
และจาก $n(A\cup B\cup C)=15$ จะได้ $a+b+c+d+e+f+2=15$

$$(a+d)+(b+c)+e+f=13$$
$$8 \quad + \quad 4 \quad +e+f=13$$
$$e+f=1 \quad ...(4)$$

พอเรามี $a+b$ จาก (3) กับ $e+f$ จาก (4) เราจะใช้ $n(A)=3(n(C))$ มาแก้หา d ได้

$$a+b+d+2=3(d+2+e+f)$$
$$9 \quad +d+2=3(d+2+ \quad 1 \quad)$$
$$d+11=3d+9$$
$$1 = d$$

จะแทน d กลับไปหาทุกตัวเลยก็ได้

แต่ข้อนี้ถาม $n\left(\left(A\cup B\right)-C\right)$ ได้แก่บริเวณ  $=a+b+c$

ดังนั้น จะหาแค่ตัวที่โจทย์ถามก็พอ

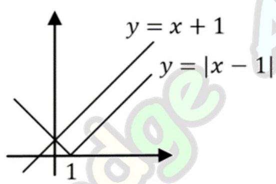
แทน $d=1$ ใน (1) จะได้ $a=8-1=7$ และใน (2) มี $b+c=4$ อยู่แล้ว

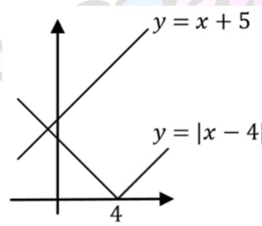
ดังนั้น $a+b+c=a+(b+c)=7+4=11$

2. **ตอบ : 2**

วิธีทำ ก. แยกตัวประกอบได้เป็น $\left|(x-1)(x-4)\right|<(x+1)(x+5)$

จะใช้วิธีดูค่า y ของ $y=|x-1|, y=|x-4|, y=x+1, y=x+5$ มาเทียบกัน





และเนื่องจากเอกภพสัมพัทธ์คือ $\mathbb{R}^{+}$

ดังนั้น จะดูเฉพาะกรณีที่ $x>0$

จะเห็นว่า $0\le|x-1|<x+1$

และ $0\le|x-4|<x+5$

ดังนั้น $\left|(x-1)(x-4)\right|<(x+1)(x+5)$

ดังนั้น ***ก. ถูก***

ข. แยกตัวประกอบได้เป็น $\left|(x-1)(x+1)\right|\ge 2(x-1)$

ถ้า $x=1$ จะได้ $0\ge 0\rightarrow$ อสมการเป็นจริง

ถ้า $x\ne 1$ จะเอา $|x-1|$ หารตลอด ได้ $|x+1|\ge 2\cdot\frac{x-1}{|x-1|}$

จะเห็นว่า $\frac{x-1}{|x-1|}$ จะตัดกันเป็น 1 หรือ -1 เสมอ ขึ้นกับว่า $x-1$ เป็นลบหรือบวก

$\rightarrow$ ถ้า $x>1$ จะได้ $\frac{x-1}{|x-1|}=1$ จะได้อสมการกลายเป็น $|x+1|\ge 2$ ซึ่งจริงเสมอ เพราะ $x>1$

$\rightarrow$ ถ้า $x<1$ จะได้ $\frac{x-1}{|x-1|}=-1$ จะได้อสมการกลายเป็น $|x+1|\ge -2$ ซึ่งจริงเสมอ เพราะค่าสัมบูรณ์ ≥ 0 แต่ ข. บอกว่า ประพจน์เป็นเท็จ $\rightarrow$ ***ข. ผิด***

3. **ตอบ : 1**

วิธีทำ จาก $p \to (q \wedge r) \equiv F$ จะได้ $p \equiv T$ และ $q \wedge r \equiv F$

แทน $p \equiv T$ ลงในประโยคที่สอง จะได้ $T \leftrightarrow (s \vee t) \equiv T$ ดังนั้น $s \vee t \equiv T$

1. $\equiv \sim(q \wedge s) \vee (T \wedge q) \;\; \equiv (\sim q \vee \sim s) \vee q \;\; \equiv (\sim q \vee q) \vee \sim s \;\; \equiv T \vee \sim s \;\; \equiv T$

2. เป็นเท็จได้เมื่อ $s \equiv T, t \equiv T, q = T$ และถ้าให้ $r \equiv F$ จะยังทำให้เงื่อนไขที่มีจริงหมด

3. $\equiv (q \vee s) \leftrightarrow T \;\; \equiv q \vee s$ เป็นเท็จได้เมื่อ $q \equiv F, s \equiv F$ และถ้าให้ $t \equiv T$ จะยังทำให้เงื่อนไขที่มีจริงหมด

4. $\equiv (T \to r) \to s \;\; \equiv \sim (F \vee r) \vee s \;\; \equiv \sim r \vee s$ เป็นเท็จได้เมื่อ $r \equiv T, s \equiv F$ และถ้าให้ $q \equiv F, t \equiv T$ จะยังคงทำให้เงื่อนไขที่มีจริงหมด

4. **ตอบ : 4**

วิธีทำ ข้อนี้ จะแบ่งกรณีทำก็ได้

แต่ถ้าสังเกตดีๆ จะพบว่า ข้างในค่าสมบูรณ์บวกกัน $(2-2x)+(x+2)$ ได้เท่ากับทางขวา $4-x$ พอดี จากสมบัติค่าสัมบูรณ์ สมการในรูป $|a|+|b| = a+b$ จะเป็นจริงเมื่อ a กับ $b \geq 0$ ทั้งคู่เท่านั้น

ดังนั้น จะได้ $2-2x \geq 0$ และ $x+2 \geq 0$

$2 \geq 2x$ $\qquad x \geq -2$

$1 \geq x$

รวมสองเงื่อนไข จะได้ $-2 \leq x \leq 1$ ดังนั้น $A = [-2, 1]$ ซึ่งจะเป็นสับเซตของ***ข้อ 4.***

5. **ตอบ : 3**

วิธีทำ ข้อนี้ต้องสังเกตว่าตัวส่วน $4x^2-8x+7$ กับ $4x^2-10x+7$ คล้ายๆกัน ต่างกันแค่ตรงกลาง $-8x$ กับ $-10x$ เราจะสร้างตัวแปรใหม่ เป็นตัวที่อยู่ตรงกลางระหว่าง 2 ตัวนี้ คือ ให้ $k = 4x^2-9x+7$

ดังนั้น $k+x = 4x^2-8x+7$ และ $k-x = 4x^2-10x+7$

จะได้สมการคือ $\frac{4x}{k+x}+\frac{3x}{k-x} = 1 \to$ คูณตัวส่วนตลอด ได้ $4x(k-x)+3x(k+x) = (k-x)(k+x)$

$$
\begin{aligned}
4kx-4x^2+3kx+3x^2 &= k^2-x^2 \\
0 &= k^2-7kx \\
0 &= k(k-7x)
\end{aligned}
$$

จะได้ $k=0$ หรือ $k-7x=0$

แทนค่า k กลับ จะได้ $4x^2-9x+7=0$ หรือ $4x^2-9x+7-7x=0$

ไม่มีคำตอบ เพราะ

$$\begin{aligned} b^2-4ac &= (-9)^2-4(4)(7) \\ &= 81-112 \\ &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x^2-16x+7 &= 0 \\ (2x-7)(2x-1) &= 0 \\ x &= \frac{7}{2}, \frac{1}{2} \end{aligned}$$

จะได้ $A=\left\{\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right\}$

เนื่องจาก A มีแค่ 2 ตัว และจากที่ถามใน (ก) และ (ข) จะเห็นว่าไม่ต้องหา B ก็ได้ แค่รู้ว่าแทนใน B แล้วจริงหรือไม่

ลองแทน $\frac{7}{2}$ กับ $\frac{1}{2}$ ใน B ดู $x=\frac{7}{2}$ จะได้ $\left|\frac{49}{4}-7\right|+\frac{49}{4}>4 \rightarrow$ จริง

$x=\frac{1}{2}$ จะได้ $\left|\frac{1}{4}-1\right|+\frac{1}{4}>4 \rightarrow$ ไม่จริง $\rightarrow$ ***ก. ผิด***

และจะได้ $A\cap B$ เหลือแค่ $\left\{\frac{7}{2}\right\}$ ตัวเดียว ดังนั้น $P(A\cap B)$ มีสมาชิก $2^1=2$ ตัว $\rightarrow$ ***ข. ถูก***

6. **ตอบ : 1**

วิธีทำ หา $g(x)$ โดยเอา $g^{-1}(x)$ มาเปลี่ยน x เป็น y, เปลี่ยน y เป็น x จะได้

$x=2y+1 \rightarrow y=\frac{x-1}{2} \rightarrow g(x)=\frac{x-1}{2}$ ทั้ง (ก) และ (ข) ไม่ได้ใช้ $f(x)$ ใช้แต่ $f^{-1}(x)$

ดังนั้น จะหาแต่ $f^{-1}(x)$ จาก $(f\circ g)(x)=4x-5$

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 4x-5 \\ g(x) &= f^{-1}(4x-5) \\ \frac{x-1}{2} &= f^{-1}(4x-5) \end{aligned}$$

ให้ $4x-5=k$ จะได้ $x=\frac{k+5}{4}$ แทนกลับไปใน f^{-1} จะได้ $\frac{\frac{k+5}{4}-1}{2}=f^{-1}(k)$

$\frac{k+1}{8}=f^{-1}(k)$ ดังนั้น $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{8}$

ก. $$\begin{aligned} 4f^{-1}(g(2x+1)) &= g(x)+1 \\ 4f^{-1}\left(\frac{2x+1-1}{2}\right) &= \frac{x-1}{2}+1 \\ 4f^{-1}(x) &= \frac{x+1}{2} \\ 4\cdot\frac{x+1}{8} &= \frac{x+1}{2} \rightarrow \textbf{จริง} \end{aligned}$$

ข. $$\begin{aligned} g^{-1}\left(f^{-1}(g(x))\right) &= \frac{x+1}{8}+1 \\ g^{-1}\left(f^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)\right) &= \frac{x+9}{8} \\ g^{-1}\left(\frac{\frac{x-1}{2}+1}{8}\right) &= \frac{x+9}{8} \\ g^{-1}\left(\frac{x+1}{16}\right) &= \frac{x+9}{8} \\ 2\left(\frac{x+1}{16}\right)+1 &= \frac{x+9}{8} \\ \frac{x+1}{8}+1 &= \frac{x+9}{8} \rightarrow \textbf{จริง} \end{aligned}$$

7. **ตอบ : 3**

วิธีทำ (ก) แทน A กับ I จะได้ $2\left(\begin{bmatrix}1 & a\\ b & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)^{-1}=4\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & a\\ b & 4\end{bmatrix}\rightarrow 2\begin{bmatrix}0 & a\\ b & 3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -a\\ -b & 0\end{bmatrix}$

จากสูตรอินเวอร์สการคูณเมทริกซ์ $\begin{bmatrix}w & x\\ y & z\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{wz-xy}\begin{bmatrix}z & -x\\ -y & w\end{bmatrix}$ จะได้ $\dfrac{2}{-ab}\begin{bmatrix}3 & -a\\ -b & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -a\\ -b & 0\end{bmatrix}$

จะเห็นว่าส่วนที่เป็นเมทริกซ์ของทั้งสองฝั่งเหมือนกัน ดังนั้น $\dfrac{2}{-ab}=1$ จะได้ $ab=-2\rightarrow$ ***ก.ผิด***

(ข) จากสูตร $\det(kA)=k^n\det A$ จะได้ $\det\left(3A^2A^tA^{-1}\right)=3^2\det\left(A^2A^tA^{-1}\right)$

det กระจายในการคูณเมทริกซ์ได้ $=\dfrac{3^2(\det A)^2\det A}{\det A}$

$\det A^n=(\det A)^n$ $\quad=3^2(\det A)^2$

$\det A^t=\det A$ $\quad=9(4-ab)^2$

$\det A^{-1}=\frac{1}{\det A}$ $\quad=9\left(4-(-2)\right)^2=324\rightarrow$ ***ข.ถูก***

8. **ตอบ : 1**

วิธีทำ จัดรูปพาราโบลา หา F ก่อน ได้ $4y-13+9=x^2-6x+9$ เป็นพาราโบลาหงายที่มี $V(3,1)$

$4(y-1)=(x-3)^2$ และ $c=1$ จะได้ F คือ $(3,2)$

จาก (ก) จะได้ ไฮเพอร์โบลาแนวตั้ง, จาก (ข) จะได้ ศก$(3,2)\rightarrow$ รูปสมการคือ $\dfrac{(y-2)^2}{a^2}-\dfrac{(x-3)^2}{b^2}=1$

จาก (ง) จะได้ $b=\frac{12}{2}=6$ และจาก (ค) จะได้ $c=2+2\sqrt{13}-2=2\sqrt{13}$

แต่จาก $c=\sqrt{a^2+b^2}$ จะได้ $2\sqrt{13}=\sqrt{a^2+6^2}$ แก้จะได้ $a=\sqrt{52-36}=4$

ดังนั้น สมการคือ $\dfrac{(y-2)^2}{4^2}-\dfrac{(x-3)^2}{6^2}=1\rightarrow 3^2\left(y^2-4y+4\right)-2^2\left(x^2-6x+9\right)=12^2$

$9y^2-36y+36-4x^2+24x-36-144=0$

ไม่ตรงกับตัวเลือกไหนเลย $\quad 9y^2-4x^2+24x-36y-144=0$

ต้องคูณ -1 ถึงจะตรงกับข้อ 1 $\quad 4x^2-9y^2-24x+36y+144=0$

9.* **ตอบ : 4**

วิธีทำ ข้อนี้ โจทย์ต้องบอกด้วยว่า $A > 1$ ไม่งั้นจะมีวงรีสองวงที่สอดคล้องกับเงื่อนไขโจทย์ และจะสรุปอะไรไม่ได้เลย ศก $= (2,1)$ แต่ยังไม่รู้ว่า รีแนวนอนหรือแนวตั้ง

จะสมมติให้วงรีจะมีรูปสมการคือ $\frac{(x-2)^2}{p^2} + \frac{(y-1)^2}{q^2} = 1$

จัดรูปให้ สปส x^2 เป็น 1 เหมือนที่โจทย์ให้ โดยกระจายและคูณ p^2 ตลอด

ได้ $$x^2 - 4x + 4 + \frac{p^2\left(y^2-2y+1\right)}{q^2} = p^2$$

$$x^2 + \frac{p^2}{q^2}y^2 - 4x - \frac{2p^2}{q^2}y + 4 + \frac{p^2}{q^2} - p^2 = 0$$

เทียบ สปส จะได้ $A = \frac{p^2}{q^2}, B = -4, C = -\frac{2p^2}{q^2}, -92 = 4 + \frac{p^2}{q^2} - p^2 \ldots(*)$

เนื่องจาก $A > 1$ จะได้ $p > q$ ดังนั้น เป็นวงรีแนวนอน เนื่องจาก แกนเอก$= 2$(แกนโท) จะได้ $p = 2q$

แทนใน $(*)$ จะได้ $A = \frac{(2q)^2}{q^2} = \frac{4q^2}{q^2} = 4,\ C == -\frac{2(2q)^2}{q^2} = -8,\ 4 + \frac{2(2q)^2}{q^2} - (2q)^2 = -92$

$$100 = 4q^2$$

$$5 = q$$

$$\rightarrow p = 2(5) = 10$$

(1) $A + B + C = 4 + (-4) + (-8) \neq 0 \rightarrow$ ***ผิด***

(2) ความเยื้องศก $= \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{\sqrt{p^2-q^2}}{p} = \frac{\sqrt{10^2-5^2}}{10} = \frac{\sqrt{75}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$ ***ผิด***

(3) จัดรูปวงกลม ได้ $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 20 + 2^2 + 1^2 = 25 \rightarrow$ ศก $(2,1), r = 5$ มี ศก ร่วมกัน แต่ แกนเอกวงรี $= 2p = 2(10) = 20$ ไม่เท่ากับ r วงกลม $\rightarrow$ ***ผิด***

(4) สังเกตว่า $20 =$ แกนเอกวงรีพอดี ดังนั้น แค่ตรวจสอบว่า $(2,6)$ อยู่บนวงรีรึเปล่าก็พอ

แทน $(2,6)$ ในสมการวงรี จะได้ $\frac{(2-2)^2}{10^2} + \frac{(6-1)^2}{5^2} = 0 + 1 = 1$ จริง $\rightarrow$ ***ถูกต้อง***

<u>หมายเหตุ</u> **:** ถ้าข้อนี้ไม่บอกว่า $A > 1$ จะมีวงรี $\frac{(x-2)^2}{\sqrt{385/4}} + \frac{(y-1)^2}{\sqrt{385}} = 1$ อีกวง

ซึ่งจะจัดรูปได้ $x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 4x - \frac{1}{2}y - 92 = 0$ สอดคล้องกับเงื่อนไขที่โจทย์ให้

10. ตอบ : 1

วิธีทำ หาจุดตัด $x-3y+1=0 \ldots(1)$ และ $2x+5y-9=0 \ldots(2)$

$(2)-2(1)$ จะได้ $11y-11=0 \rightarrow y=1$ แทนใน (1) ได้ $x=3(1)-1=2$ ดังนั้น $A=(2,1)$

จะได้ L คือ $\frac{y-1}{x-2}=m \quad \rightarrow \quad y-1=mx-2m \quad \rightarrow \quad y-mx+2m-1=0 \quad \ldots(*)$

จะได้ระยะจาก $(0,0)=\frac{|0-m(0)+2m-1|}{\sqrt{1^2+(-m)^2}}=\frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=k$

แทน k ในสมการ $k^2+2m=1$ จะได้ $\left(\frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2+2m \quad = 1$

ตัดค่าสัมบูรณ์ที่ถูกยกกำลังสองออกได้ $\frac{(2m-1)^2}{m^2+1}+2m-1=0$

เนื่องจาก $m<0$ จะได้ $2m-1 \neq 0 \rightarrow$ เอา $2m-1$ หารตลอดเหลือ $\frac{2m-1}{m^2+1}+1=0$

คูณตลอด ด้วย m^2+1 จะได้
$$\begin{aligned} 2m-1+m^2 &= 0 \\ m^2+2m &= 0 \\ m(m+2) &= 0 \\ m &= 0,-2 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $m<0$ จะได้ $m=-2$ แทนใน $(*)$ จะได้ $y+2x-5=0$

11. ตอบ : 3

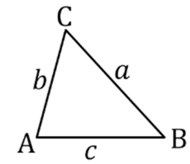
วิธีทำ ให้ $B=\theta$ จะได้ $A=2\theta$ และ $C=180^\circ-(\theta+20)=180^\circ-3\theta$

ทุกมุม มี θ หมด $\rightarrow$ สามารถเชื่อมด้วยกฎของ sin ได้
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$
$$\frac{a}{\sin 2\theta}=\frac{b}{\sin\theta}=\frac{c}{\sin\left(180^\circ-3\theta\right)}$$
$$\frac{a}{\sin 2\theta}=\frac{b}{\sin\theta}=\frac{c}{\sin 3\theta}$$
$$\frac{a}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{b}{\sin\theta}=\frac{c}{3\sin\theta-4\sin^3\theta}$$
$$\frac{a}{2\cos\theta}=b=\frac{c}{3-4\sin^2\theta} \quad \ldots(*)$$

สังเกตว่า ตัวเลือกแต่ละข้อ จะคล้ายๆกฎของ cos

โดยสองตัวเลือกแรก เหมือนจะใช้กฎของ cos ที่ C แต่สองตัวเลือกหลังใช้กฎของ cos ที่ A

ถ้าใช้กฎของ cos ที่ C จะมีมุม 3θ ซึ่งดูยุ่งยาก แต่ถ้าใช้กฎของ cos ที่ A จะมี $\cos 2\theta$ ซึ่งดูง่ายกว่า ใช้กฎของ cos ที่ A จะได้ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$



$$\begin{aligned} &= b^2 + c^2 - 2bc\cos 2\theta \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\left(1 - 2\sin^2\theta\right) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc + 4bc\sin^2\theta \ \ldots(**) \end{aligned}$$

จะกำจัด $\sin^2\theta$ ใน $(**)$ โดยเอาคู่หลังใน $(*)$ มาคูณไขว้จะได้ $3b - 4b\sin^2\theta = c$

$$\begin{aligned} 3b - c &= 4b\sin^2\theta \\ 3b - c^2 &= 4bc\sin^2\theta \end{aligned}$$

แทน $4bc\sin^2\theta$ ใน $(**)$ จะได้ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc + 3bc - c^2 = b^2 + bc \rightarrow$ ***ข้อ 3***

12. **ตอบ : 2**

วิธีทำ จะเห็นว่าตัวเลือกทุกข้อ เป็น arctan หมด ซึ่งจะตัดกับ tan ได้ $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$
ดังนั้น เราจะดูว่า tan ของสิ่งที่โจทย์ถาม ตรงกับ tan ของตัวเลือกข้อไหน

จะได้ $\tan\left(\arctan\left(\frac{3\cos\theta}{1-3\sin\theta}\right) - \text{arccot}\left(\frac{\cos\theta}{3-\sin\theta}\right)\right) = \dfrac{\tan\left(\arctan\left(\frac{3\cos\theta}{1-3\sin\theta}\right)\right) - \tan\left(\text{arccot}\left(\frac{\cos\theta}{3-\sin\theta}\right)\right)}{1 + \tan\left(\arctan\left(\frac{3\cos\theta}{1-3\sin\theta}\right)\right)\tan\left(\text{arccot}\left(\frac{\cos\theta}{3-\sin\theta}\right)\right)}$

จาก $\tan(\arctan x) = x$ และ $\tan(\text{arccot}\, x) = \frac{1}{x}$ จะได้ $= \dfrac{\frac{3\cos\theta}{1-3\sin\theta} - \frac{3-\sin\theta}{\cos\theta}}{1 + \left(\frac{3\cos\theta}{1-3\sin\theta}\right)\left(\frac{3-\sin\theta}{\cos\theta}\right)}$

เศษ $= \dfrac{3\cos^2\theta - (3-\sin\theta)(1-3\sin\theta)}{(1-3\sin\theta)(\cos\theta)}$

$$= \frac{3\cos^2\theta - \left(3 - 10\sin\theta + 3\sin^2\theta\right)}{(1-3\sin\theta)(\cos\theta)}$$

$$= \frac{3\left(1-\sin^2\theta\right) - 3 + 10\sin\theta - 3\sin^2\theta}{(1-3\sin\theta)(\cos\theta)}$$

$$= \frac{3 - 3\sin^2\theta - 3 + 10\sin\theta - 3\sin^2\theta}{(1-3\sin\theta)(\cos\theta)}$$

$$= \frac{10\sin\theta - 6\sin^2\theta}{(1-3\sin\theta)(\cos\theta)}$$

$$= \frac{2\sin\theta(5-3\sin\theta)}{(1-3\sin\theta)(\cos\theta)}$$

ส่วน $= 1 + \dfrac{3(3-\sin\theta)}{1-3\sin\theta}$

$= \dfrac{1-3\sin\theta+9-3\sin\theta}{1-3\sin\theta}$

$= \dfrac{10-6\sin\theta}{1-3\sin\theta}$

$= \dfrac{2(5-3\sin\theta)}{1-3\sin\theta}$

จะได้ $\frac{\text{เศษ}}{\text{ส่วน}} = \dfrac{2\sin\theta(5-3\sin\theta)}{(1-3\sin\theta)(\cos\theta)} \times \dfrac{1-3\sin\theta}{2(5-3\sin\theta)}$

$= \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

จะเห็นว่าตัวเลือกข้อ 3 ข้อเดียว ที่ tan แล้วตัดกับ arctan เหลือ $\tan\theta$ ดังนั้น ***ตอบข้อ 3***

<u>หมายเหตุ</u> : เงื่อนไข $0 < \theta < 15^\circ$ ที่โจทย์ให้ มีเพื่อรับประกันว่า $\dfrac{3\cos\theta}{1-3\sin\theta}$ จะเป็นบวก

เพราะ $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \sim \dfrac{0.732}{2.828} < \dfrac{1}{3}$ ทำให้ $\arctan\left(\dfrac{3\cos\theta}{1-3\sin\theta}\right)$ เป็นบวก

ในขณะที่ $\operatorname{arccot}\left(\dfrac{\cos\theta}{3-\sin\theta}\right)$ เป็นบวกเสมออยู่แล้ว

ถ้า $\theta > 15^\circ$ เช่น 45° จะทำให้ $\arctan\left(\dfrac{3\cos\theta}{1-3\sin\theta}\right) - \operatorname{arccot}\left(\dfrac{\cos\theta}{3-\sin\theta}\right)$ ติดลบ

และจะไม่เท่ากับ $\arctan\left(\tan 45^\circ\right)$ ซึ่งเป็นบวก

13. **ตอบ : 2**

วิธีทำ ก. $\cos 2B = 2\cos^2\left(45^\circ + A\right)$

$1 - 2\sin^2 B = 2\left(\cos 45^\circ \cos A - \sin 45^\circ \sin A\right)^2$

$1 - 2\sin A\cos A = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos A - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin A\right)^2$

$= 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos A - \sin A)\right)^2$

$= 2\cdot\dfrac{2}{4}(\cos A - \sin A)^2$

$= (1)\left(\cos^2 A - 2\sin A\cos A + \sin^2 A\right)$

$= 1 - 2\sin A\cos A$ → ***ก. ถูก***

ข. จาก $\sin A = \sqrt{2}\sin B$ ยกกำลังสอง จะได้ $\sin^2 A = 2\sin^2 B \quad \ldots(1)$

จาก $\sqrt{3}\sec B = \sqrt{2}\sec A \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\cos B} = \frac{\sqrt{2}}{\cos A} \rightarrow$ คูณไขว้และยกกำลังสอง จะได้

$3\cos^2 A = 2\cos^2 B \quad \ldots(2)$

$$
\begin{aligned}
(1)+(2): \quad \sin^2 A + 3\cos^2 A &= 2\sin^2 B + 2\cos^2 B \\
1-\cos^2 A + 3\cos^2 A &= 2\left(\sin^2 B + \cos^2 B\right) \\
1+\cos^2 A &= 2\left(\quad 1 \quad\right) \\
\cos^2 A &= \frac{1}{2} \\
\cos A &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

จาก $0 \le A \le \frac{\pi}{2}$ จะได้ $\cos A \ge 0$ ดังนั้น $\cos A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ จะได้ $A = 45^\circ$

และจาก $\sin A = \sqrt{2}\sin B$ จะได้ $\sin B = \frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ ดังนั้น $B = 30^\circ$

ดังนั้น $\sin 10A + \cos 10B = \sin 450^\circ + \cos 300^\circ = \sin 90^\circ + \cos 60^\circ = 1 + \frac{1}{2} = 1.5 \rightarrow$ ***ข. ผิด***

14. ตอบ : 1

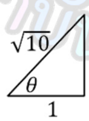
วิธีทำ จาก $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$ จะได้ $\bar{a}+\bar{b}=-\bar{c}$ ดังนั้น $\left|\bar{a}+\bar{b}\right| = \left|-\bar{c}\right| = \left|\bar{c}\right|$ ดังนั้น $\left|\bar{c}\right| = 5$

จะได้ $\bar{b}+\bar{c}=-\bar{a}$ ดังนั้น $\left|\bar{b}+\bar{c}\right| = \left|-\bar{a}\right| = \left|\bar{a}\right|$ ดังนั้น $\left|\bar{a}\right| = 3$

ก. จาก $\left|\bar{a}+\bar{b}\right| = 5$ และจากสูตร $\left|\bar{a}+\bar{b}\right|^2 = \left|\bar{a}\right|^2 + \left|\bar{b}\right|^2 + 2\bar{a}\cdot\bar{b}$

$$
\begin{aligned}
5^2 &= 3^2 + \sqrt{10}^2 + 2\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\cos\theta \\
6 &= 2(3)\left(\sqrt{10}\right)\cos\theta \\
\frac{1}{\sqrt{10}} &= \cos\theta
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $0 \le \theta \le \pi$ และ $\cos\theta$ เป็นบวก ดังนั้น θ อยู่ใน Quadrant ที่ 1 จะได้ $\tan\theta$ เป็นบวก

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} \rightarrow$ 

$= \sqrt{\sqrt{10}^2 - 1^2} = 3$ ดังนั้น $\tan\theta = \frac{3}{1} = 3 \rightarrow$ ***ก.ถูก***

ข. จะหา $\bar{a}\cdot\bar{c}$ ได้จากสูตร $\left|\bar{a}+\bar{c}\right|^2 = \left|\bar{a}\right|^2 + \left|\bar{c}\right|^2 + 2\bar{a}\cdot\bar{c}$

จาก $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$ จะได้ $\bar{a}+\bar{c}=-\bar{b}$ ดังนั้น $\left|\bar{a}+\bar{c}\right|^2 = \left|-\bar{b}\right|^2 = \left|\bar{b}\right| = \sqrt{10}$

แทนในสูตร จะได้ $\sqrt{10}^2 = 3^2 + 5^2 + 2\bar{a}\cdot\bar{c}$

$$-24 = 2\bar{a}\cdot\bar{c}$$

$$-12 = \bar{a}\cdot\bar{c} \quad \rightarrow$$ ***ข.ถูก***

15. ตอบ : 3

วิธีทำ มีเลขโดด 9 ตัว แต่ละหลักจะเลือกได้ 9 แบบ เนื่องจากมี 5 หลัก จะสร้างได้ทั้งหมด $=9^5$ แบบ ถ้าต้องใช้แค่ 3 ตัว จะต้องมีตัวซ้ำ จะแบ่งกรณีตามรูปแบบการซ้ำ

<u>**กรณี**</u> ซ้ำ $3+$ต่าง 2: ขั้นที่ 1 จัดกลุ่มเลขโดด: เลือกเลขโดดที่จะมาซ้ำ 3 ได้ 9 แบบ

ที่เหลือเลือกเลขโดดที่จะมาเป็น ต่าง 2 ได้ $\binom{8}{2}$ แบบ

ขั้นที่ 2 เรียงเลขที่ได้จากขั้นที่ 1: ซ้ำ $3+$ต่าง 2 จะเรียงได้ $\frac{5!}{3!}$ แบบ

ดังนั้น ได้จำนวนแบบ $=9\times\binom{8}{2}\times\frac{5!}{3!}=(9)(8)(7)(5)(2)$ แบบ

<u>**กรณี**</u> ซ้ำ 2 สองคู่$+$ต่าง 1: ขั้นที่ 1 จัดกลุ่มเลขโดด: เลือกเลขโดดที่จะมาซ้ำ 2 สองคู่ ได้ $\binom{9}{2}$ แบบ

เหลือ 7 ตัว เลือกมาเป็น ต่าง 1 ได้ 7 แบบ

ขั้นที่ 2 เรียงเลขที่ได้จากขั้นที่1: ซ้ำ 2 สองคู่$+$ต่าง 1จะเรียงได้ $\frac{5!}{2!2!}$ แบบ

ดังนั้น ได้จำนวนแบบ $=\binom{9}{2}\times 7\times\frac{5!}{2!2!}=(9)(8)(7)(5)(3)$ แบบ

ดังนั้น ความน่าจะเป็น $=\frac{(9)(8)(7)(5)(2)+(9)(8)(7)(5)(3)}{9^5}=\frac{(8)(7)(5)(2+3)}{9^4}=\frac{1400}{6561}$

16. ตอบ : 1

วิธีทำ ข้อนี้ใช้สูตร $\frac{(n-1)!}{(n_1!)(n_2!)\ldots(n_k!)}=\frac{5!}{3!3!}$ <u>ไม่ได้</u> เพราะ ห.ร.ม. $(n_1,n_2,\ldots,n_k)=(3,3)\neq 1$

(หนังสือบางเล่ม บอกว่าใช้ได้ แต่ให้ปัดเศษขึ้น ซึ่งจะ<u>บังเอิญถูก</u>ในบางกรณีเท่านั้น)

ถ้า ห.ร.ม. $(n_1,n_2,\ldots,n_k)\neq 1$ จะมีปัญหาตอนคิดกลุ่มของตัวที่เอามาตอกไม่ให้วงหมุน ในพวกแบบที่ “เป็นคาบ” เช่น ถ้าใช้ W_1 ตอก จะมีปัญหากับพวกแบบ $W_1R\ W_2R\ W_3R$ (ซ้ำเป็นคาบทีละ 2 ตัว คือ <u>WR</u> <u>WR</u> <u>WR</u>) กล่าวคือ ปกติแล้ว 3! แบบต่อไปนี้ ควรจะเป็นแบบที่ต่างกัน ที่ถูกนับเป็นแบบเดียวเมื่อ W_1, W_2, W_3 ซ้ำกัน

$W_1R\ W_2R\ W_3R$ $\quad$ $W_2R\ W_1R\ W_3R$ $\quad$ $W_3R\ W_1R\ W_2R$

$W_1R\ W_3R\ W_2R$ $\quad$ $W_2R\ W_3R\ W_1R$ $\quad$ $W_3R\ W_2R\ W_1R$

แต่จะเห็นว่า $W_1R\ W_2R\ W_3R$ กับ $W_2R\ W_3R\ W_1R$ กับ $W_3R\ W_1R\ W_2R$ ถือเป็นวงเดียวกันตั้งแต่ยังไม่ได้คิดว่า W_1, W_2, W_3 ซ้ำกันแล้ว ดังนั้นพวกที่ "เป็นคาบ" จะมีกลุ่มซ้ำไม่ถึง 3! แบบ ทำให้เอามาหารด้วย 3! เป็น $\frac{5!}{3!3!}$ <u>ไม่ได้</u>

อย่างไรก็ตาม ข้อนี้เลขน้อย เขียนนับเอาเลยก็ได้ โดยจะแบ่งกรณีนับเป็น 3 กรณี

กรณี W ติดกันทั้ง 3 ตัว	กรณี W ติดกัน 2 ตัว		กรณี W ไม่ติดกัน
W W W R R R	W R W W R R	W R W R R W	W R R W W R

รวมสามกรณี จะมี 4 แบบ $\rightarrow$ ***ตอบข้อ 1***

<u>**หมายเหตุ**</u> **:** ถ้าข้อนี้จะไม่เขียนนับ ต้องแยกพวกแบบที่ "เป็นคาบ" ออกไปคิดต่างหาก

จะได้เป็น $\dfrac{\frac{(6-1)!}{3!}-(3-1)!}{3!}+(2-1)!=4$ แบบ

17. **ตอบ : 2**

วิธีทำ ต่อเนื่องที่ $x=-2$ แสดงว่า $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=f(-2)=\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$ กับ $f(-2)$ ใช้สูตรเดียวกัน จะได้ $=-(-2)+a=2+a$ เท่ากัน

และ $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-\frac{2}{5}(-2)+b=\frac{4}{5}+b$ ดังนั้น $2+a=\frac{4}{5}+b \quad \ldots(1)$

และจาก $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ หาค่าได้ แสดงว่า $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$

$$-\frac{2}{5}(3)+b=3^2-6(3)+11$$

$$b=\frac{16}{5}$$

แทนใน (1) จะได้ $a=\frac{20}{5}-2=2$ ดังนั้น $|a+5b|=|2+16|=18$

18. ตอบ : 3

ดึง $\sqrt{x}$ เป็นตัวร่วม　　　　คูณคอนจูเกต

วิธีทำ จัดรูปจะได้
$$\frac{x-1}{x+\sqrt{x}}=\frac{x-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{x-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}(x-1)}$$
$$=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}=1-\frac{1}{\sqrt{x}}=1-x^{-\frac{1}{2}}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_1^b \frac{x-1}{x+\sqrt{x}}dx=\int_1^b 1-x^{-\frac{1}{2}}dx=\left(x-2x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^b=\left(b-2b^{\frac{1}{2}}\right)-(1-2)=b-2\sqrt{b}+1$

แต่โจทย์บอกว่าอินทิเกรตได้ 4 ดังนั้น
$$\begin{aligned} b-2\sqrt{b}+1 &= 4\\ b-2\sqrt{b}-3 &= 0\\ \left(\sqrt{b}-3\right)\left(\sqrt{b}+1\right) &= 0\\ \sqrt{b} &= 3,-1 \end{aligned}$$

แต่รูทเป็นลบไม่ได้ ดังนั้น $\sqrt{b}=3$ จะได้ $b=9$ ดังนั้น $1+b+b^2=1+9+81=91$

19. ตอบ : 2

วิธีทำ จาก $f(1)=0$ จะได้ $f(1)=a\left(1^2\right)+b(1)+c=a+b+c=0\quad\ldots(1)$

และจะได้ $f'(x)=2ax+b$ จะเห็นว่า $f'(x)=0$ เมื่อ $x=-\frac{b}{2a}$

แต่โจทย์บอกว่า f มีค่าสูงสุดที่ $x=\frac{1}{3}$ ดังนั้น $-\frac{b}{2a}=\frac{1}{3}$ จัดรูป จะได้ $2a+3b=0\quad\ldots(2)$

จาก $F(0,t)=F(1,t)+1$ จะได้
$$\begin{aligned} \int_0^t f(x)dx &= \int_1^t f(x)dx+1\\ \int_0^1 f(x)dx+\int_0^t f(x)dx &= \int_1^t f(x)dx+1\\ \int_0^1 f(x)dx &= 1 \end{aligned}$$

แต่ $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\Big|_0^1=\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c\right)-(0)=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c$

ดังนั้น $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=1$ คูณ 6 ตลอด ได้ $2a+3b+6c=6\quad\ldots(3)$

จาก $(1),(2),(3)$ จะแก้หา a,b,c ได้ : $(3)-(2)$ จะเหลือ $6c=6\rightarrow c=1$

$(2)-2(1)$ และแทน $c=1$ จะได้ $b=2c=2$

แทน b,c ใน (1) จะได้ $a=-2-1=-3$

ดังนั้น $f(x)=-3x^2+2x+1$

(ก) $F(1,2)=-x^3+x^2+x\Big|_1^2=(-8+4+2)-(-1+1+1)=-3$

$F(2,3)=-x^3+x^2+x\Big|_2^3=(-27+9+3)-(-8+4+2)=-13\rightarrow$ น้อยกว่าอยู่ $10\rightarrow$ ***ก. ถูก***

(ข) $\frac{f(x)}{x^2}=-3+2x^{-1}+x^{-2}\rightarrow$ ดิฟ ได้ $0-2x^{-2}-2x^{-3}\neq\frac{-3x^2-2x-2}{x^3}\rightarrow$ ***ข. ผิด***

20. ตอบ : 4

วิธีทำ จัดรูป a_n ทำเทเลสโคปิค : $\frac{n^2}{16n^2-4}=\frac{n^2}{4(4n^2-1)}=\frac{n^2}{4(2n-1)(2n+1)}$

$$=\frac{n^2}{4}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{8}\left(\frac{n^2}{2n-1}-\frac{n^2}{2n+1}\right)$$

ดังนั้น $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$

$$=\frac{1}{8}\left[\left(\frac{1^2}{1}-\frac{1^2}{3}\right)+\left(\frac{2^2}{3}-\frac{2^2}{5}\right)+\left(\frac{3^2}{5}-\frac{3^2}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{n^2}{2n-1}-\frac{n^2}{2n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{1^2}{1}+\left(\frac{2^2}{3}-\frac{1^2}{3}\right)+\left(\frac{3^2}{5}-\frac{2^2}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{n^2}{2n-1}-\frac{(n-1)^2}{2n-1}\right)-\frac{n^2}{2n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{1^2}{1}+\frac{(2+1)(2-1)}{3}+\frac{(3+2)(3-2)}{5}+\cdots+\frac{(n+(n-1))(n-(n-1))}{2n-1}-\frac{n^2}{2n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n}-\frac{n^2}{2n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[n-\frac{n^2}{2n+1}\right]$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{8n}\left[n-\frac{n^2}{2n+1}\right]=\frac{1}{8}\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{n}{2n+1}\right]=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$

ดังนั้น $a=1, b=16$ จะได้ $a^2+b^2=1+256=257$

21. ตอบ : 4

วิธีทำ ให้ $z=a+bi$ จะได้ $\bar{z}=a-bi$ แทนในสมการ จะได้ $a-bi-1-4i=3i(a+bi-i)$

$$(a-1)+(-b-4)i=3ai-3b+3$$
$$=(-3b+3)+3ai$$

จะได้ $a-1=-3b+3\ \ldots(1)$ และ $-b-4=3a\ \ldots(2)$

จาก (1) จะได้ $a=-3b+4$ แทนใน (2) จะได้ $-b-4=3(-3b+4)$

$$8b=16$$
$$b=2$$

แทนใน (1) จะได้ $a-1=-3(2)+3$ จะได้ $a=-2$ ดังนั้น $z=-2+2i$

(1) $(-2+2i)+(-2-2i)=i((-2+2i)-(-2-2i))$

$-4 = i(4i)$ $\rightarrow$ ***ถูกต้อง***

(2) $|-2+2i+2| = |2i| = 2$ $\rightarrow$ ***ถูกต้อง***

(3) ฝั่งซ้าย $=(-2-2i)^2-8i=(4+8i-4)-8i=0$ $\rightarrow$ ***ถูกต้อง***

(4) ฝั่งซ้าย $=(-2+2i)(1-i)^3-8i$

$=-2(1-i)(1-i)^3-8i$

$=-2(1-i)^4-8i$

$=-2\left((1-i)^2\right)^2-8i$

$=-2(1-2i-1)^2-8i$

$=-2(-2i)^2-8i$

$=8-8i\neq 0$ $\rightarrow$ ***ผิด***

22. ตอบ : 1

วิธีทำ ระบบสมการคือ $\sum y=a\sum x+bn$
$\sum xy=a\sum x^2+b\sum x$

โดย $\sum y=1+0.8+0.8+0.6=3.2$
$\sum x=0+1+2+3=6$
$n=4$
$\sum xy=0+0.8+1.6+1.8=4.2$
$\sum x^2=0+1+4+9=14$

แทนระบบสมการ จะได้ $3.2=6a+4b\ \ldots(1)$ และ $4.2=14a+6b\ \ldots(2)$

$(2)-\frac{3}{2}(1)$ จะได้ $6b$ ตัดกัน เหลือ $-0.6=5a$ จะได้ $a=-0.12$

แทนใน (1) จะได้ $3.2=-0.72+4b$ จะได้ $b=\frac{3.92}{4}=0.98$

(ก) จะได้ $a+11=-0.12+1.1=0.98=b\rightarrow$ ***ถูก***

(ข) ถ้า $x=8$ จะได้ $y=-0.12(8)+0.98=-0.96+0.98=0.02\rightarrow$ ***ถูก***

23. ตอบ : 1

วิธีทำ (ก)

$$\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x+\log_{16} x-2\log_{64} x = 7$$
$$\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{3}\log_2 x+\frac{1}{4}\log_2 x-\frac{2}{6}\log_2 x = 7$$
$$(\log_2 x)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{2}{6}\right) = 7$$

$$(\log_2 x)\left(\frac{7}{4}\right)=7$$
$$\log_2 x = 4$$
$$x = 16$$

แทน $x=16$ ในอีกสมการ จะได้ $16-3\sqrt{16}=4 \rightarrow$ ***ถูกต้อง***

(ข) สมการแรก คูณสองฝั่งด้วย $\log_2 3$ จะได้ $1-a=2\log_2 3-\log_2 5$

$$a=1-2\log_2 3+\log_2 5$$

สมการสอง คูณสองฝั่งด้วย $\log_2 5$ จะได้ $3+b=2\log_2 5-\log_2 3$

$$b=-3+2\log_2 5-\log_2 3$$

สมการสาม คูณสองฝั่งด้วย $\log_2 7$ จะได้ $3+c=4\log_2 3-\log_2 5$

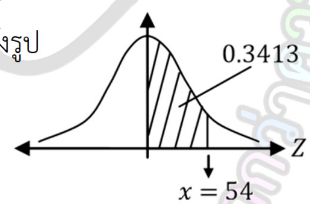
$$c=-3+4\log_2 3-\log_2 5$$

ดังนั้น $2a+b-c$

$$=2\left(1-2\log_2 3+\log_2 5\right)+\left(-3+2\log_2 5-\log_2 3\right)-\left(-3+4\log_2 3-\log_2 5\right)$$
$$= 2-4\log_2 3+2\log_2 5 \quad -3+2\log_2 5-\log_2 3 \quad +3-4\log_2 3+\log_2 5$$
$$= 2-9\log_2 3+5\log_2 5$$ $\rightarrow$ ***ถูกต้อง***

24. ตอบ : 3

วิธีทำ แจกแจงปกติ $\rightarrow \bar{x} =$ มัธยฐาน $=$ ฐานนิยม $\rightarrow \bar{x}=45$

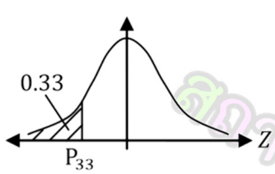


โจทย์บอกว่า มี 34.13% อยู่ระหว่างมัธยฐาน กับ 54 จะวาดได้ดังรูป

เอา $A=0.3413$ ไปเปิดตาราง จะได้ $Z=1.0$ ดังนั้น $x=54$

จะได้ $Z=1.0$

จากสูตร $z=\dfrac{x_i-\bar{x}}{s}$ จะได้ $1.0=\dfrac{54-45}{s}\rightarrow s=9$



ถัดมา หา P_{33} จากรูป เนื่องจากพื้นที่ที่ใช้เปิดตาราง ต้องเป็นพื้นที่ที่วัดจากแกนกลาง ดังนั้น ต้องเอา $A=0.5-0.33=0.17$ ไปเปิดตาราง จะได้ $z=-0.44$ และ P_{33} อยู่ทางฝั่งซ้าย จะมี Z เป็นลบ ดังนั้น P_{33} จะมี $z=-0.44$

จากสูตร $z=\dfrac{x_i-\bar{x}}{s}$ จะได้ $-0.44=\dfrac{P_{33}-45}{9}\rightarrow P_{33}=-3.96+45=41.04$

ดังนั้น นักเรียนคนนี้ ได้ $\dfrac{5}{3}\times 41.04=68.4$ เต็ม $100=68.4\%$

25. ตอบ : 4

วิธีทำ เรียงข้อมูลก่อน จะได้ 28 30 32 35 40 42 45 48 50 65

(ก) D_7 อยู่ตำแหน่งที่ $\frac{1(10+1)}{10} = 7.7 \to$ จะได้ $D_7 =$ ตัวที่ $7 + 0.7$ (ตัวที่ $8 -$ ตัวที่ 7)

$$= 45 + 0.7(48-45) = 45 + 2.1 = 47.1$$

มัธยฐาน $=$ ตัวที่ $\frac{10+1}{10} = 5.5 \to$ จะได้ $M = \frac{\text{ตัวที่}5+\text{ตัวที่}6}{2} = \frac{40+42}{2} = 41$

จะได้ $D_7 - M = 47.1 - 41 = 6.1 \to$ ***ก. ผิด***

(ข) ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

Q_3 อยู่ตำแหน่งที่ $\frac{3(10+1)}{4} = 8.25 \to$ จะได้ $Q_3 =$ ตัวที่ $8 + 0.25$ (ตัวที่ $9 -$ ตัวที่ 8)

$$= 48 + 0.25(50-48) = 48 + 0.5 = 48.5$$

Q_1 อยู่ตำแหน่งที่ $\frac{1(10+1)}{4} = 2.75 \to$ จะได้ $Q_1 =$ ตัวที่ $2 + 0.75$ (ตัวที่ $3 -$ ตัวที่ 2)

$$= 30 + 0.75(32-30) = 30 + 1.5 = 31.5$$

ดังนั้น ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ $= \frac{48.5-31.5}{2} = \frac{17}{2} = 8.5 \to$ ***ข. ผิด***

26. ตอบ : 4

วิธีทำ $\bar{u} \times \bar{j} = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-b \\ 0-0 \\ a-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$ ดังนั้น $\left|\bar{u} \times \bar{j}\right| = \sqrt{(-b)^2 + 0^2 + a^2} = 2$

$$b^2 + a^2 = 4$$

ดังนั้น $\left|\bar{u}\right|^2 = a^2 + 2^2 + b^2 = \left(a^2 + b^2\right) + 2^2 = 4 + 4 = 8$

27. ตอบ : 2

วิธีทำ (ก) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \\ bc & c & 0 \end{bmatrix}$ ดังนั้น $A^2 + A + I = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ b & 1 & ab \\ bc & c & 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\det\left(A^2 + A + I\right) = \left(1 + (abc)^2 + abc\right) - \left(abc + abc + abc\right)$

$$= \left(1 + 1 + 1\right) - \left(1 + 1 + 1\right) = 0 \to \textit{ก.ถูก}$$

(ข) จะเห็นว่า B เกิดจากการนำ A ทำ $(1).\ R_1 + 2R_2 - 3R_3$, $(2).\ 2R_2$ และ $(3).\ 3R_3$ จากสมบัติ det จะได้ว่า $(1).$ จะไม่มีผลกับ det แต่ $(2).$ กับ $(3).$ จะทำให้ det เพิ่มเป็น 2 เท่า และ 3 เท่า ตามลำดับ

ดังนั้น ถ้า $\det(A) = 3$ แล้ว จะได้ $\det(B)$ เพิ่มเป็น $(2)(3)(3) = 18 \to$ ***ข. ผิด***

28. ตอบ : 2

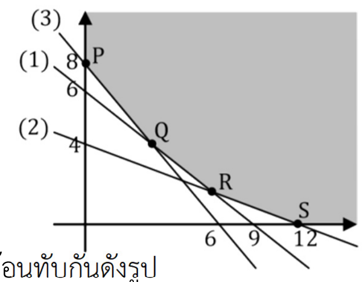
วิธีทำ ให้ผสมปุ๋ย A จำนวน x ถุงและ ปุ๋ย B จำนวน y ถุง

ดังนั้น จะได้ $N = 2x + 3y,\ P = x + 3y,\ K = 80x + 60y$ และค่าใช้จ่าย $= 10x + 12y$

จะได้เงื่อนไขคือ $2x + 3y \ge 18 \quad \ldots(1)$

$x + 3y \ge 12 \quad \ldots(2)$

$80x + 60y \ge 480 \quad \ldots(3)$



โดยวัตถุประสงค์คือ ต้องทำให้ $C = 10x + 12y$ ต่ำสุด

วาดอสมการเงื่อนไขจากจุดตัดแกน และแรเงาพื้นที่ที่สอดคล้อง

จำนวนถุงต้องไม่ติดลบ จึงเอาเฉพาะพื้นที่ใน Q_1 จะได้บริเวณที่ซ้อนทับกันดังรูป

ต้องการหาค่าน้อยสุด จะมีจุดมุมที่ต้องสงสัย 4 จุด คือ P, Q, R, S

หาพิกัดจุด Q จากการแก้ (1) กับ $(3) \to (3) - 20(1) : 40x = 120 \to x = 3$ แทนใน (1) ได้ $y = 4$

หาพิกัดจุด R จากการแก้ (1) กับ $(2) \to (1) - (2) : x = 6 \to$ แทนใน (2) ได้ $y = 2$

แทน P, Q, R, S หาจุดที่ C ต่ำสุด $P(0,8) \ : C = 10(0) + 12(8) = 96$

$Q(3,4) \ : C = 10(3) + 12(4) = 78 \ \to$ min

$R(6,2) \ : C = 10(6) + 12(2) = 84$

$S(12,0) \ : C = 10(12) + 12(0) = 120$

ดังนั้น เสียค่าใช้จ่ายน้อยสุด $= 78$ บาท

29. ตอบ : 3

วิธีทำ ให้ $m = 2a + 3b$ และ $n = 3a + 2b$ แทนใน ก. และ ข. จะได้ดังนี้

ก.
$$\begin{aligned} \frac{m+4c}{n+3c} &> \frac{m}{n} \\ mn + 4nc &> mn + 3mc \\ 4n &> 3m \\ 4(3a+2b) &> 3(2a+3b) \\ 12a + 8b &> 6a + 9b \\ 6a &> b \end{aligned}$$

ข.
$$\begin{aligned} \frac{n+c}{m+c} &> \frac{n}{m} \\ mn + mc &> mn + nc \\ m &> n \\ 2a + 3b &> 3a + 2b \\ b &> a \end{aligned}$$

โจทย์ให้ $a < b \to$ ***ข.จริง***

โจทย์ให้ $a < b$ ซึ่งจะเห็นว่า $6a > b$ อาจจะไม่จริง

เช่น ถ้า $a = 1, b = 7$ และ c เป็นอะไรก็ได้ ประโยคนี้จะผิด

เช่น ถ้า $a = 1, b = 7, c = 1$ จะได้ ก. คือ $\frac{27}{20} > \frac{23}{17}$ ซึ่งไม่จริง

30. ตอบ : 4

วิธีทำ แทน $y=0$ จะได้ $f(\underbrace{x+g(0)}_{k})=2x+15$ เราจะใช้เทคนิคเปลี่ยนตัวแปร เพื่อหา $f(x)$

ให้ $x+g(0)=k$

$x=k-g(0)$

$=2(k-g(0))+15$

$=2k-2g(0)+15$

ดังนั้น $f(k)=2k-2g(0)+15 \quad ...(1)$

ถัดมา แทน $x=0$ ใน $f(x+g(y))$ ที่โจทย์ให้ จะได้ $f(g(y))=y+15$

แต่ถ้าแทน k ใน (1) ด้วย $g(y)$ จะได้ $f(g(y))=2g(y)-2g(0)+15$

ใช้ $f(g(y))$ เป็นตัวเชื่อม จะได้ $2g(y)-2g(0)+15=y+15$

$$g(y)=\frac{y+2g(0)}{2} \quad ...(2)$$

ก. แทน f และ g จาก (1) และ (2) จะได้ $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-2g(0)+15)$

$$=\frac{2x-2g(0)+15+2g(0)}{2}$$

$$=\frac{2x+15}{2} \rightarrow$$ ***ก. ผิด***

ข. $g(25+f(57))=g(25+114-2g(0)+15)=g(154-2g(0))$

$$=\frac{154-2g(0)+2g(0)}{2}=77 \rightarrow$$ ***ข. ผิด***

31. ตอบ : 5

วิธีทำ $2\log_2(x+7)+4\log_{2^2}(x-3)=3\log_{2^3}64(x^2-4x+4)$

$$2\log_2(x+7)+\frac{4}{2}\log_2(x-3)=\frac{3}{3}\log_2(8(x-2))^2$$

$$2\log_2(x+7)+2\log_2(x-3)=2\log_2(8(x-2))$$

$$\log_2(x+7)+\log_2(x-3)=\log_2(8(x-2))$$

$$\log_2(x+7)(x-3)=\log_2(8(x-2))$$

$$x^2+4x-21=8x-16$$

$$x^2-4x-5=0$$

$$(x-5)(x+1)=0$$

$$x=5,-1$$

แต่จะเห็นว่า -1 ใช้ไม่ได้ เพราะทำให้หลัง $\log_4(x-3)$ เป็นลบ $\rightarrow$ เหลือ 5 ตัวเดียว $\rightarrow$ ***ตอบ 5***

32. ตอบ : 54

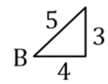
วิธีทำ แก้หา cos B และ cos C ก่อน $25\cos B-13\cos C=15 \quad ...(1)$

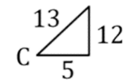
$65\cos B+65\cos C=77 \quad ...(2)$

$$5(1)+(2):190\cos B=152\rightarrow \cos B=\frac{4}{5}\text{ แทนใน }(1)\text{ ได้ }\cos C=\frac{20-15}{13}=\frac{5}{13}$$

จะหา sin ของทุกมุม เพื่อใช้กฎของ sin

$\cos=\frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}\rightarrow$ วาดรูป + หาด้านที่เหลือ ได้ดังรูป





เนื่องจาก B, C เป็นมุมแหลม จะได้ sin เป็นบวก ดังนั้น $\sin B=\frac{3}{5}$, $\sin C=\frac{12}{13}$

และ $\sin A=\sin\left(180^\circ-(B+C)\right)=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}=\frac{63}{65}$$

จากกฎของ sin จะได้ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ แทนค่าต่างๆที่รู้ จะได้ $\frac{a}{\frac{63}{65}}=\frac{b}{\frac{3}{5}}=\frac{20}{\frac{12}{13}}$

ดังนั้น $a=\frac{20}{\frac{12}{13}}\times\frac{63}{65}=20\times\frac{13}{12}\times\frac{63}{65}=21$ และ $b=\frac{20}{\frac{12}{13}}\times\frac{3}{5}=20\times\frac{13}{12}\times\frac{3}{5}=13$

จะได้ความยาวรอบรูป $=a+b+c=21+13+20=54$

33. ตอบ : 681

วิธีทำ ข้อนี้ ทำได้หลายวิธี จะกระจาย $\cos(2\theta+3\theta)$ ก็ได้ หรือจะใช้ $(\cos\theta+i\sin\theta)^5=\cos 5\theta+i\sin 5\theta$ ก็ได้ ผมคิดว่า ใช้วิธีแทน θ สามมุมลงไป แล้วแก้ระบบสมการ น่าจะง่ายที่สุด โดยต้องเลือก θ ที่ cos แล้วได้เลขน้อยๆ

$$\theta=0^\circ:\quad 1=a+b+c \quad\rightarrow\quad 1=a+b+c \quad ...(1)$$

$$\theta=60^\circ:\quad \frac{1}{2}=\frac{a}{2^5}+\frac{b}{2^3}+\frac{c}{2} \quad\rightarrow\quad 16=a+4b+16c \quad ...(2)$$

$$\theta=45^\circ:\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}^5}+\frac{b}{\sqrt{2}^3}+\frac{c}{\sqrt{2}} \quad\rightarrow\quad -4=a+2b+4c \quad ...(3)$$

$(2)-(1):\ 15=3b+15c$

$5=b+5c \quad ...(4)$

$(3)-(1):-5=b+3c \quad ...(5)$

$(4)-(5):10=2c \quad\rightarrow c=5$

แทน c ใน (5) จะได้ $b=-5-15=-20$

แทน b,c ใน (1) จะได้ $a=1+20-5=16$

ดังนั้น $a^2+b^2+c^2=256+400+25=681$

34. ตอบ : 3

วิธีทำ A : จากสมบัติ log จะได้ $3\cdot4^x+2\cdot9^x=6^{x+\log_6 5}$

$3\cdot4^x+2\cdot9^x=6^x\cdot6^{\log_6 5}$

$3\cdot2^{2x}+2\cdot3^{2x}=2^x3^x\cdot5$

$3\cdot m^2+2\cdot n^2=mn(5)$

$3m^2-5mn+2n^2=0$

$(3m-2n)(m-n)=0$

ดังนั้น $3m=2n$ หรือ $m=n$

$3(2^x)=2(3^x)$ $\quad$ $2^x=3^x$

$2^{x-1}=3^{x-1}$ $\quad$ จะได้ $x=0$

จะได้ $x-1=0\to x=1$ $\quad$ $\to A=\{1,0\}$

B : ต้องสังเกตว่า ฝั่งซ้ายยกกำลังสอง $=\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)=x^2+2x\sqrt{1-x^2}+1-x^2$

$=2x\sqrt{1-x^2}+1=$ ฝั่งขวา พอดีเป๊ะ

ดังนั้น ถ้าให้ $k=x+\sqrt{1-x^2}$ จะได้สมการกลายเป็น $k=k^2$

$0=k^2-k$

$0=k(k-1)$

$k=0,1$

ดังนั้น $x+\sqrt{1-x^2}=0$ หรือ $x+\sqrt{1-x^2}=1$

$\sqrt{1-x^2}=-x$ $\quad$ $\sqrt{1-x^2}=1-x$

$1-x^2=(-x)^2\ ;\ -x\geq0$ $\quad$ $1-x^2=(1-x)^2\ ;\ 1-x\geq0$

$1=2x^2$ $\quad$ $1-x^2=1-2x+x^2$

$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=x$ $\quad$ $0=2x^2-2x$

แต่จาก $-x\geq0$ จะเหลือ $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad$ $0=2x(x-1)$

$x=0,\ 1$

สอดคล้องกับ $1-x\geq0$ ทุกตัว จะได้ $x=0,1$

ดังนั้น $A\cup B=\left\{0,1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\to$ มีสมาชิก 3 ตัว

35. ตอบ : 9

วิธีทำ จาก $\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)(1)=1$

$$f^{-1}\left(g^{-1}(1)\right)=1$$

$$g^{-1}(1)=f(1)\ \ldots(*)$$

จะหา $g^{-1}(1)$ ต้องหา x ที่ $g(x)=1$ นั่นคือ

$$x^3-3x(x-1)=1$$
$$x^3-3x^2+3x-1=0$$
$$(x-1)^3=0$$
$$x=1 \quad \rightarrow \text{จะได้ } g^{-1}(1)=1$$

และ $f(1)=a(1)+2=a+2$ แทนใน $(*)$ จะได้ $1=a+2\rightarrow a=-1$

ดังนั้น $(g\circ f)(a)=g(f(-1))=g((-1)(-1)+2)=g(3)=3^3-3(3)(3-1)=9$

36. ตอบ : 500

วิธีทำ เอา $\frac{a_1}{a_1+2}=\frac{a_2}{a_2+3}=\ldots=\frac{a_{1000}}{a_{1000}+1001}$ มากลับเศษส่วน

จะได้ $\frac{a_1+2}{a_1}=\frac{a_2+3}{a_2}=\frac{a_3+4}{a_3}=\ldots=\frac{a_{1000}+1001}{a_{1000}}$

$$1+\frac{2}{a_1}=1+\frac{3}{a_2}=1+\frac{4}{a_3}=\ldots=1+\frac{1001}{a_{1000}}$$

$$\frac{2}{a_1}=\frac{3}{a_2}=\frac{4}{a_3}=\ldots=\frac{1001}{a_{1000}}$$

จับ $\frac{2}{a_1}$ เท่ากับแต่ละตัว เพื่อเขียน a_n ในรูป a_1 : จาก $\frac{2}{a_1}=\frac{3}{a_2}$ จะได้ $a_2=\frac{3a_1}{2}$

จาก $\frac{2}{a_1}=\frac{4}{a_3}$ จะได้ $a_3=\frac{4a_1}{2}$

$\vdots$

จาก $\frac{2}{a_1}=\frac{1001}{a_{1000}}$ จะได้ $a_{1000}=\frac{1001a_1}{2}$

$\{a_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิต (เพิ่มทีละ $\frac{a_1}{2}$)

เนื่องจาก $\{a_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิต และโจทย์ถาม $a_1+a_{1000}\rightarrow$ หาได้จากสูตร $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$

นั่นคือ $a_1+a_2+\ldots+a_{1000}=\frac{1000}{2}(a_1+a_{1000})$

$$250000=\frac{1000}{2}(a_1+a_{1000})$$

$$500=a_1+a_{1000}$$

37. ตอบ : 1704

วิธีทำ จะใช้วิธีเอาสมการมาหักด้วยตัวมันเอง → จาก $a_k + a_{k+1} + a_{k+2} = 2576 - k \quad ...(1)$

เพิ่ม 1 ตำแหน่ง โดยแทน k ด้วย $k+1$ จะได้ $a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} = 2576 - (k+1) ...(2)$

$(1)-(2)$ จะได้ $a_k - a_{k+3} = 1$ นั่นคือ ตัวที่ห่างกัน 3 ตำแหน่ง ค่าจะน้อยลง 1

เช่น $a_1 = 12 \rightarrow a_4 = 11 \rightarrow a_7 = 10 \rightarrow a_{10} = 9 \rightarrow ...$(กลุ่ม $\div 3$ เหลือเศษ 1)

$a_2 = 2556 \rightarrow a_5 = 2555 \rightarrow a_8 = 2554 \rightarrow a_{11} = 2553 \rightarrow ...$(กลุ่ม $\div 3$ เหลือเศษ 2)

$a_3 = 7 \rightarrow a_6 = 6 \rightarrow a_9 = 5 \rightarrow a_{12} = 4 \rightarrow ...$(กลุ่ม $\div 3$ ลงตัว)

เนื่องจาก 2558 หารด้วย 3 เหลือเศษ 2

ดังนั้น จะเอากลุ่ม $\div 3$ เหลือเศษ 2 มาคิด

ดังตาราง

n	2	5	8	11	...	2558
a_n	2556	2555	2554	2553	...	x

สองแถวนี้ ต้องมีจำนวนตัวเท่ากัน ใช้สูตร จำนวนตัว $= \frac{\text{ปลาย - ต้น}}{\text{ห่าง}} + 1$ จะได้ $\frac{2558-2}{3} + 1 = \frac{x-2556}{-1} + 1$

$$852 = \frac{x-2556}{-1}$$

$$1704 = x$$

38. ตอบ : 340

วิธีทำ ก่อนอื่น จะเอา A ทั้งสามตัวมาวางเป็นหลักไว้ก่อน จะได้ __ A __ A __ A __

จากนั้น เอา T มาแทรก (ในขั้นนี้ T ยังติดกันได้อยู่ เพราะยังเอา P มาแทรกให้มันแยกกันตอนสุดท้ายได้)

กรณีที่ T ทั้งสามตัวติดกัน : เราจะมัด T ทั้งสามตัวเป็นตัวใหม่ 1 ตัว ได้เป็น $\boxed{\text{TTT}}$

มีช่องระหว่าง A อยู่ 4 ช่อง ดังนั้น จะเลือกใส่ $\boxed{\text{TTT}}$ ได้ 4 แบบ

เช่น ถ้าเลือกได้ช่องที่ 2 จะได้เป็น A <u>T T T</u> A A

จากนั้น เอา P มาเสียบ จะเห็นว่าจำเป็นต้องเสียบ P สองตัวไประหว่าง <u>TTT</u> เพื่อไม่ให้ T ติดกัน ได้เป็น A <u>T P T P T</u> A A ส่วน P อีกตัวที่เหลือ ห้ามเสียบติดกับ P สองตัวแรก จะเหลือช่อง __ A __ T P T P T __ A __ A __ ให้เสียบได้ 5 ช่อง เลือกได้ 5 แบบ

→ รวมทุกขั้นตอนของกรณีนี้ จะได้ $4 \times 5 = 20$ แบบ

กรณีที่ T สองตัวติดกัน และ T อีกตัวแยกออกไป : ต้องเอา $\boxed{\text{TT}}$ กับ T มาเสียบ

มีช่องระหว่าง A อยู่ 4 ช่อง จะเลือกช่องให้ $\boxed{\text{TT}}$ และ T ได้ $4 \times 3 = 12$ แบบ

เช่น ถ้าเลือกได้ช่องแรก กับช่องสุดท้าย จะได้เป็น <u>TT</u> A A A T

จากนั้น เอา P มาเสียบ จะเห็นว่าจำเป็นต้องเสียบ P หนึ่งตัวไประหว่าง <u>TT</u> เพื่อไม่ให้ T ติดกัน ได้เป็น <u>T P T</u> A A A T ส่วน P อีกสองตัวที่เหลือ ห้ามเสียบติดกับ P ตัวแรก

จะเหลือช่อง __ T P T __ A __ A __ A __ T __ ให้เสียบ P สองตัวได้ 6 ช่อง เลือกได้

$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ แบบ → รวมทุกขั้นตอนของกรณีนี้ จะได้ $12 \times 15 = 180$ แบบ

<u>กรณีที่ T ไม่ติดกันเลย :</u> มีช่องระหว่าง A อยู่ 4 ช่อง จะเลือกให้ T ทั้งสามตัวได้ $\binom{4}{3} = 4$ แบบ

เช่น ถ้าเลือกได้ช่องแรก กับ 2 ช่องหลัง จะได้ T A A T A T

จากนั้น เอา P มาเสียบ จะเหลือช่อง _ T _ A _ A _ T _ A _ T _ ให้เสียบ P สามตัวได้ 7 ช่อง เลือกได้ $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$ แบบ $\rightarrow$ รวมทุกขั้นตอนของกรณีนี้ จะได้ $4 \times 35 = 140$

รวมทุกกรณี ได้ $20 + 180 + 140 = 340$ แบบ

39. ตอบ : 109

วิธีทำ จากสมบัติของค่าเฉลี่ย จะได้ $\bar{y} = a\bar{x} + b = 6a + b$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยรวม $= \dfrac{N_x\bar{x} + N_y\bar{y}}{N_x + N_y} = \dfrac{n(6) + n(6a+b)}{n+n} = \dfrac{6a+b+6}{2} \rightarrow$

โจทย์ให้ $= 7 \rightarrow \dfrac{6a+b+6}{2} = 7$

$b = 8 - 6a \quad \ldots(*)$

ถัดมา จากสูตรความแปรปรวน $S_x^2 = \dfrac{\sum x^2}{N} - \bar{x}^2$ จะได้ $2^2 = \dfrac{\sum x^2}{n} - 6^2$

$40n = \sum x^2$

และจากสมบัติของ s จะได้ $s_y = |a| s_x \overset{a>0}{=} 2a$ ดังนั้น $(2a)^2 = \dfrac{\sum y^2}{n} - (6a+b)^2$

(b ที่มาบวก จะไม่มีผลกับค่า s) $4a^2 + (6a+b)^2 = \dfrac{\sum y^2}{n}$

$(40a^2 + 12ab + b^2)n = \sum y^2$

จะได้ ความแปรปรวนรวม $= \dfrac{\sum x^2 + \sum y^2}{n+n} - 7^2 = \dfrac{40n + (40a^2 + 12ab + b^2)n}{2n} - 49$

$= \dfrac{40 + 40a^2 + 12ab + b^2}{2} - 49$

โดยให้ ความแปรปรวนรวม $= 21$ ดังนั้น $\dfrac{40 + 40a^2 + 12ab + b^2}{2} - 49 = 21$

$40a^2 + 12ab + b^2 = 100$

แทน b จาก $(*)$

$$\begin{aligned} 40a^2+12a(8-6a)+(8-6a)^2 &= 100 \\ 10a^2+3a(8-6a)+(4-3a)^2 &= 25 \\ 10a^2+24a-18a^2+16-24a+9a^2 &= 25 \\ a^2 &= 9 \end{aligned}$$

โจทย์ให้ $a>0$ ดังนั้น $a=3$ แทนใน $(*)$ จะได้ $b=8-6(3)=-10$

ดังนั้น $a^2+b^2=9+100=109$

40. ตอบ : 7

วิธีทำ เอาความถี่สะสมช่องที่ติดกันมาลบกัน จะได้ช่องความถี่ปกติ (แบบไม่สะสม) ดังตาราง โดยช่อง ร้อยละความถี่สัมพัทธ์นี้ สามารถใช้แทนความถี่ในการหาค่ากลางและการกระจายข้อมูลได้เลย โดยต้องเทียบให้จำนวนข้อมูลทั้งหมด มี 100 จำนวน

ค่าสังเกต (x)	ร้อยละของความถี่สะสมสัมพัทธ์	ร้อยละของความถี่สัมพัทธ์
1	20	20
2	40	20
A	70	30
6	90	20
10	100	10

จะได้ $\bar{x}=\dfrac{20(1)+20(2)+30a+20(6)+10(10)}{100}$

$=\dfrac{280+30a}{100}$

แต่โจทย์ให้ $\bar{x}=4$ ดังนั้น $\dfrac{280+30a}{100}=4\rightarrow$

แก้ได้ $a=4$

ดังนั้น ความแปรปรวน $=\dfrac{\sum f_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{N}$

$=\dfrac{20(1-4)^2+20(2-4)^2+30(4-4)^2+20(6-4)^2+10(10-4)^2}{100}$

$=\dfrac{180+80+0+80+360}{100}=7$

41. ตอบ : 38

วิธีทำ จัดรูปเส้นตรง จะได้ $y=5x+13\rightarrow$ เทียบกับรูป $y=mx+c$ จะได้ ความชัน $=5$ ดังนั้น $f'(1)=5$ ด้วย จาก $f'(x)=b+3x^2$ จะได้ $f'(1)=b+3\left(1^2\right)=5\rightarrow$ แก้สมการ จะได้ $b=2$ และจุดที่เส้นตรงสัมผัส f จะต้องอยู่ทั้งบน เส้นตรงและ $f\rightarrow$ แทน $x=1$ ในเส้นตรง $y=5x+13$ ได้ $y=18$ ดังนั้น จุด $(1,18)$ ต้องอยู่บน f ด้วย $\rightarrow(1,18)$ ต้องแทนใน $f(x)=a+bx+x^3$ แล้วเป็นจริง จะได้ $18=a+2(1)+1^3\rightarrow$ แก้ได้ $a=15\rightarrow$ จะได้ $f(x)=15+2x+x^3$ ดังนั้น $\int_0^2 f(x)dx=15x+x^2+\dfrac{x^4}{4}\Big|_0^2=(30+4+4)-(0)=38$

42. ตอบ : 634

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$ เทียบกับ x ขณะที่ $x=3$ ก็คือ $f'(3)$ นั่นเอง

เนื่องจากตัวส่วน $\lim\limits_{x\to 3} x-3=0$ แต่ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{xf(x)-333}{x-3}$ หาค่าได้ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{xf(x)-333}{x-3}$ ต้องอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

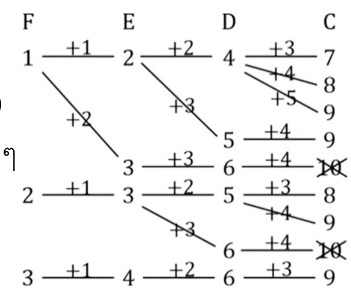
ใช้โลปิตาล จะได้ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{xf(x)-333}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\text{ดิ๊ฟบน}}{\text{ดิ๊ฟล่าง}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{1}=3f'(3)+f(3)=3f'(3)+111$

แต่โจทย์ให้ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{xf(x)-333}{x-3}=2013$ ดังนั้น $3f'(3)+111=2013\to$ แก้ได้ $f'(3)=\dfrac{1902}{3}=634$

43. ตอบ : 35

วิธีทำ *ขั้น 1* เลือก A, B : เขียนนับจำนวนที่บวกกันเป็น 14 จะมี $(9,5),(8,6)(7,7)(6,8),(5,9)\to 5$ แบบ

ขั้น 2 เลือก C, D, E, F จาก $C-D>D-E>E-F>0$ แสดงว่า จาก $F\to E\to D\to C$ จะมีผลลบของแต่ละคู่เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ โดย F จะเป็นค่าที่น้อยที่สุด ถ้าไล่นับดู จะได้ 7 วิธี ดังรูป



ดังนั้น จะได้จำนวนแบบ $=5\times 7=35$ แบบ

44. ตอบ : 2750

วิธีทำ แยกเทเลสโคปิค ได้ $A=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2015}-\dfrac{1}{2016}$

$$=\frac{1}{1}+\frac{1-2}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1-2}{4}+\ldots+\frac{1}{2015}+\frac{1-2}{2016}$$

เปลี่ยน -1 เป็น $1-2$

$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}\right)-\left(\frac{2}{2}+\frac{2}{4}+\ldots+\frac{2}{2016}\right)$$

แยกตัวที่เป็นลบไปไว้ข้างหลัง

$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{1008}\right)$$

ตัด 1008 พจน์แรกได้

$$=\frac{1}{1009}+\frac{1}{1010}+\ldots+\frac{1}{2016}$$

ถัดมา หา B สังเกตว่าตัวเลขทุกคู่ รวมกันได้ 3025 ดังนั้น เราจะคูณ $\dfrac{3025}{3025}$ แล้วกระจาย 3025 เข้าไป

$$B=\frac{3025}{3025}\left(\frac{1}{(1009)(2016)}+\frac{1}{(1010)(2015)}+\ldots+\frac{1}{(2016)(1009)}\right)$$

$$=\frac{1}{3025}\left(\frac{3025}{(1009)(2016)}+\frac{3025}{(1010)(2015)}+\ldots+\frac{3025}{(2016)(1009)}\right)$$

$$=\frac{1}{3025}\left(\frac{1009+2016}{(1009)(2016)}+\frac{1010+2015}{(1010)(2015)}+\ldots+\frac{2016+1009}{(2016)(1009)}\right)$$

$$=\frac{1}{3025}\left(\frac{1}{2016}+\frac{1}{1009}+\frac{1}{2015}+\frac{1}{1010}+\ldots+\frac{1}{1009}+\frac{1}{2016}\right)$$

$$=\frac{2}{3025}\left(\frac{1}{1009}+\frac{1}{1010}+\ldots+\frac{1}{2016}\right)$$

จะเห็นว่า $B=\frac{2}{3025}A$ จะได้ $\frac{A}{B}=\frac{3025}{2}$ ดังนั้น $\frac{20A}{11B}=\frac{20}{11}\cdot\frac{3025}{2}=2750$

45. ตอบ : 384

วิธีทำ ก่อนอื่น เราจะจัดสมการที่โจทย์ให้ ให้อยู่ในรูปง่ายที่สุดเท่าที่จะจัดได้ก่อน

(ก) $a=b+d$ ง่ายอยู่แล้ว

(ข)
$$\begin{aligned}
(a+c+(b+d))b &= (a-c)d \\
(a+c+a)b &= (a-c)d \quad \text{จาก (ก)} \\
(2a+c)b &= (a-c)d \\
2ab+bc &= ad-cd \\
2ab+bc+cd &= ad \\
2ab+c(b+d) &= ad \\
2ab+ca &= ad \quad \text{จาก (ก)} \\
2b+c &= d \quad \div a \text{ ตลอดได้ (เพราะ } a\neq 0) \\
&\qquad \ldots(1)
\end{aligned}$$

(ค)
$$\begin{aligned}
2+cd &= a(c-1) \\
2+cd &= (b+d)(c-1) \quad \text{จาก (ก)} \\
2+cd &= bc-b+cd-d \\
2 &= bc-b-d \\
2 &= bc-b-(2b+c) \quad \text{จาก (ก)} \\
2 &= bc-3b-c \qquad \ldots(2)
\end{aligned}$$

หลักทั่วไปในแก้สมการจำนวนเต็ม คือ ต้องจัดฝั่งหนึ่งให้เป็นตัวเลข แล้ว แยกตัวประกอบอีกฝั่ง แล้วอ้างว่า ฝั่งที่เป็นตัวเลข จะแยกตัวประกอบได้แค่ไม่กี่แบบ

จะเห็นว่าสมการ (2) มีฝั่งซ้ายเป็นตัวเลขแล้ว ส่วนฝั่งขวา ถ้าเติม $+3$ เข้าไป จะสามารถจัดกลุ่มดึงตัวร่วมได้

(2): $\quad 2 = bc - 3b - c$

$2 + 3 = bc - 3b - c + 3$ จะเห็นว่า 5 ทางฝั่งซ้าย แยกเป็น 2 ตัว

$5 = b(c-3) - (c-3)$ คูณกันได้แค่ 2 แบบ

$5 = (b-1)(c-3)$ คือ 5×1 กับ 1×5

กรณี 5×1: จะได้ $b-1=5$ และ $c-3=1$ จะได้ $b=6, c=4$

แทนใน (1) จะได้ $d=2(6)+4=16$, แทนใน $(ก)$ ได้ $a=6+16=22$

จะได้ $a^2+b^2+c^2+d^2=484+36+16+256=792$

กรณี 1×5: จะได้ $b-1=1$ และ $c-3=5$ จะได้ $b=2, c=8$

แทนใน (1) จะได้ $d=2(2)+8=12$, แทนใน $(ก)$ ได้ $a=2+12=14$

จะได้ $a^2+b^2+c^2+d^2=196+4+64+144=408$

เนื่องจาก $a^2+b^2+c^2+d^2$ เป็นได้แค่ 792 กับ 408 ดังนั้น $M=792$ และ $m=408$

ดังนั้น $M-m=792-408=384$