เฉลย

1. 1	11. 4	21. 4	31. 4	41. 5610
2. 2	12. 3	22. 1	32. 12	42. 12
3. 3	13. 4	23. 1	33. 4	43. 30
4. 5	14. 3	24. 2	34. 1.5	44. 37
5. 1	15. 5	25. 2	35. 23	45. 20
6. 3	16. 1	26. 5	36. 17	
7. 2	17. 4	27. 2	37. 4	
8. 4	18. 1	28. 4	38. 174.5	
9. 5	19. 4	29. 3	39. 43.5	
10. 3	20. 5	30. 3	40. 64.25	

แนวคิด

1. กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ใดๆ พิจารณาประพจน์ต่อไปนี้

(ก) $p \to [(p \to q) \to q]$ เป็นสัจนิรันดร์

(ข) $p \leftrightarrow [(p \wedge (q \to p)) \to q]$ <u>ไม่</u>เป็นสัจนิรันดร์

(ค) ถ้า $(p \to q) \wedge (q \to p)$ มีค่าความจริงเป็น <u>จริง</u>

แล้ว $[p \to (p \to q)] \to (p \wedge q)$ มีค่าความจริงเป็น <u>เท็จ</u>

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

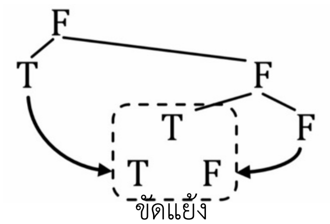
1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

ตอบ 1

วิธีทำ

(ก) ใช้วิธี สมมติให้เป็น F

$$p \to [(p \to q) \to q]$$



เกิดข้อขัดแย้ง แสดงว่าเป็น F ไม่ได้

ดังนั้น เป็นสัจนิรันดร์ $\longrightarrow$ (ก) ถูก

(ข) $\leftrightarrow$ ต้องเช็คว่า ซ้าย $\equiv$ ขวา หรือไม่

$$\begin{aligned} p &\equiv \big(p \wedge (q \to p)\big) \to q \\ &\equiv \big(p \wedge (\sim q \to p)\big) \to q \\ &\equiv \big((F \vee p) \wedge (\sim q \vee p)\big) \to q \\ &\equiv \big((F \wedge \sim q) \vee p\big) \to q \\ &\equiv p \to q \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า ซ้าย กับ ขวา ไม่สมมูลกัน

ดังนั้น ไม่เป็นสัจนิรันดร์ $\longrightarrow$ (ข) ถูก

(ค) $(p\to q)\wedge(q\to p)$ จะมีสูตรสมมูลกับ $p\leftrightarrow q$ ซึ่งจะเป็นจริงได้ 2 แบบ

คือ $p,q\equiv T$ ทั้งคู่ กับ $p,q\equiv F$ ทั้งคู่

กรณี $p,q\equiv T$ ทั้งคู่ จะได้

$$[p\to(p\to q)]\to(p\wedge q)\equiv[T\to(T\to T)]\to(T\wedge T)$$
$$\equiv \quad T \quad \to \quad T \quad \equiv T$$

เมื่อมีกรณีที่ $[p\to(p\to q)]\to(p\wedge q)$ เป็นจริง จะสรุปได้เลยว่า (ค) ผิด โดยไม่ต้องทำกรณีที่เหลือ $\longrightarrow$ (ค) ผิด

2. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือ $\{1,2,3,4\}$ ให้ $P(x)$ คือ $|x-2|+|x-3|=1$

$Q(x)$ คือ $x(x+1)\rangle 1$

และ $R(x)$ คือ $\sqrt{x-1}\langle x-3$

ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้ มีค่าความจริงเป็น <u>เท็จ</u>

1. $\forall x[P(x)]\to\forall x[\sim R(x)]$
2. $\forall x[P(x)\to Q(x)]\to\exists x[R(x)]$
3. $\forall x[Q(x)]\leftrightarrow\forall x[\sim R(x)]$
4. $\exists x[R(x)]\to\exists x[P(x)]$
5. $\exists x[Q(x)\to P(x)]\vee\forall x[Q(x)]$

ตอบ 2

วิธีทำ

จะดูเป็นข้อๆ และหาค่าความจริงเท่าที่จำเป็น

1. $\forall x[P(x)]$ จะพยายามหาตัวที่ทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จ

จะเห็นว่า ถ้า $x=4$ จะได้ $|4-2|+|4-3|=2+1\neq 1$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $\forall x[P(x)]\equiv F$

ดังนั้น ข้อ 1. $\forall x[P(x)]\to\forall x[Q(x)]$

$$F \quad \to \quad ??? \quad \equiv T$$

2. ดู $\exists x[R(x)]$ ก่อน เพราะง่ายกว่า จะพยายามหาตัวที่ทำให้ $R(x)$ เป็นจริง

$x=1:\sqrt{1-1} \langle 1-3$ ผิด
$0 \langle -2$

$x=2:\sqrt{2-1} \langle 2-3$ ผิด
$1 \langle -1$

$x=3:\sqrt{3-1} \langle 3-3$ ผิด
$\sqrt{2} \langle 0$

$x=4:\sqrt{4-1} \langle 4-3$ ผิด
$\sqrt{3} \langle 1$

$R(x)$ ผิดหมด ดังนั้น $\exists x[R(x)] \equiv F$

พิจารณา $Q(x)$ เนื่องจาก $x \geq 1$ จะทำให้ $x+1 \geq 2 \rightarrow$ คูณสองอสมการ

จะได้ $x(x+1) \geq 2$

จึงทำให้ $x(x+1) \rangle 1$ เป็นจริงเสมอ ดังนั้น $Q(x)$ เป็นจริงเสมอ ซึ่งจะได้ว่า $\forall(x)[Q(x)] \equiv T$

ดังนั้น $P(x) \rightarrow Q(x)$ อยู่ในรูป ??? $\rightarrow T$ ซึ่งจะเป็นจริงเสมอ

ดังนั้น $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)] \equiv T$

ดังนั้น $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)] \rightarrow \exists x[R(x)]$

$T \rightarrow F \equiv F$

3. จากข้อ 2. $R(x)$ ผิดหมด ดังนั้น $\sim R(x)$ จะเป็นจริงทุกตัว ดังนั้น $\forall x[\sim R(x)] \equiv T$

และจากข้อ 2. $\forall x[Q(x)] \equiv T$ ดังนั้น $\forall x[Q(x)] \leftrightarrow \forall x[\sim R(x)]$

$T \leftrightarrow T \equiv T$

4. จากข้อ 2. $\exists x[R(x)] \equiv F$ จะได้ $\exists x[R(x)] \rightarrow \exists x[P(x)]$

$F \rightarrow ??? \equiv T$

5. จากข้อ 2. $\forall x[Q(x)] \equiv T$ จะได้ $\exists x[R(x)] \rightarrow \exists x[P(x)]$

$??? \vee T \equiv T$

3. กำหนดให้ $P(S)$ แทนเพาเวอร์เซตของเซต S ให้ A,B และ C เป็นเซตใดๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $(A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C)$ (ข) $P(A)-P(B)\subset P(A-B)$

(ค) $P(P(\varnothing))\subset P(P(P(\varnothing)))$ เมื่อ $\varnothing$ แทนเซตว่าง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) ถูกเพียงข้อเดียว
2. ข้อ (ข) ถูกเพียงข้อเดียว
3. ข้อ (ค) ถูกเพียงข้อเดียว
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

ตอบ 3

วิธีทำ (ก) จะเห็นว่า ไม่เคยมีสูตรนี้ให้ท่อง ที่เคยท่องจะมีแต่
$(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$

ถ้าให้ $A=\{1\},B=\{2\},C=\{3\}$ จะได้ (ก) คือ

$$(\{1\}\cap\{2\}\cup\{3\}) = \{1\}\cap(\{2\}\cup\{3\})$$
$$\varnothing \cup \{3\} = \{1\}\cap\{2,3\}$$
$$\{3\} = \varnothing \longrightarrow \text{(ก) ผิด}$$

(ข) $P(A)-P(B)$ จะมี สับเซตของ A ที่ไม่ใช่สับเซตของ B

$P(A-B)$ จะมีสับเซตของ $A-B$ $\longrightarrow$ จะไม่มีทางมีสมาชิกของ B ออกมาให้เห็นใน $P(A-B)$

ในขณะที่ $P(A)-P(B)$ ยังอาจมีสมาชิกของ B ออกมาได้ ถ้ามันจับคู่กับสมาชิกของ A ทำให้ไม่เป็นสับเซตของ B

เช่น $A=\{1,2\}\longrightarrow P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

$B=\{1\}\longrightarrow P(B)=\{\varnothing,\{1\}\}$

จะเห็นว่า $P(A-B)=P(\{2\})=\{\varnothing,\{2\}\}\longrightarrow$ จะไม่มี 1 เพราะ ถูกหักทิ้งไปตั้งแต่ก่อนหาเพาเวอร์เซต

แต่ $P(A)-P(B)=\{\{2\},\{1,2\}\}\longrightarrow$ มี 1 ได้ เพราะ 1 ไปจับคู่กับ 2 กลายเป็น $\{1,2\}$ ที่ไม่เป็นสับเซตของ B

ดังนั้น อาจมีบางตัวใน $P(A)-P(B)$ ที่ไม่อยู่ใน $P(A)-P(B)\longrightarrow$ (ข) ผิด

(ค) จาก $\varnothing \subset P(\varnothing)$ (เซตว่าง เป็นสับเซตของทุกเซต)

$P(\varnothing) \subset P(P(\varnothing))$ (ใส่ P ทั้งสองข้าง)

$P(P(\varnothing)) \subset P(P(P(\varnothing)))$ $\longrightarrow$ (ค) ถูก

4. ให้ a , b , c และd เป็นจำนวนจริง พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า $a > b$ และ $c > d$ แล้ว $ac > bd$

(ข) ถ้า $a < b < c < 0$ แล้ว $|a-c| < |b-c|$

(ค) ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $a^c < b^d$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) ถูกเพียงข้อเดียว
2. ข้อ (ข) ถูกเพียงข้อเดียว
3. ข้อ (ค) ถูกเพียงข้อเดียว
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

ตอบ 5

วิธีทำ (ก) จะไม่จริงเมื่อมีจำนวนลบมาเกี่ยวด้วย (เมื่อคูณอสมการด้วยเลขลบ ต้องกลับเครื่องหมาย มากกว่า $\longleftrightarrow$ น้อยกว่า)

เช่น $2 > 1$ และ $-3 > -4$ แต่ $(2)(-3) > (1)(-4)$

$-6 > -4$ ผิด $\longrightarrow$ (ก) ผิด

(ข) เนื่องจาก $a < b < c$ ดังนั้น $a-c$ และ $b-c$ จะติดลบทั้งคู่

จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์ ถ้า x ติดลบ จะได้ $|x| = -x$ ดังนั้น

$$|a-c| < |b-c|$$
$$-(a-c) < -(b-c)$$
$$-a+c < -b+c$$
$$-a < -b$$
$$b < a$$

ขัดแย้ง $\longrightarrow$ (ข) ผิด

(ค) อสมการเลขยกกำลัง จะมีข้อยกเว้นกรณีที่ ฐาน <1 อยู่

(ถ้า ฐาน <1 แล้ว ยิ่งยกกำลังมาก ค่าจะยิ่งน้อย)

เช่น $0<0.1<0.2$ และ $0<1<2$ แต่ $0.1^1<0.2^2$

$0.1<0.04$ ผิด $\longrightarrow$ (ค) ผิด

5. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $|x+1|+|x+2|=3x$ แล้วเซต A เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{x\in R \mid |x+2|\geq 2|x-3|\}$
2. $\{x\in R \mid 0<|x|<3\}$
3. $\{x\in R \mid |5-2x|>3\}$
4. $\{x\in R \mid (x-1)(x-2)<0\}$
5. $\{x\in R \mid (x+1)(x-5)\geq 0\}$

ตอบ 1

วิธีทำ จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์ จะได้ $|x+1|\geq 0$ และ $|x+2|\geq 0$ ดังนั้น

โจทย์ให้ $|x+1|+|x+2|=3x$

$$|x+1|+|x+2|\geq 0$$
$$3x\geq 0$$
$$x\geq 0$$

เมื่อได้ว่า $x\geq 0$ จะสรุปได้ว่า $x+1$ และ $x+2$ เป็นบวก

ซึ่งจากสมบัติ $|a|=\begin{cases} a & ,\ a\geq 0 \\ -a & ,\ a<0 \end{cases}$

จะได้ $|x+1|=x+1$ และ $|x+2|=x+2$

ดังนั้น $|x+1|+|x+2|=3x$

$$x+1+x+2=3x$$

$$3=x$$

แทน $x=3$ ในตัวเลือกแต่ละข้อ แล้วดูว่าข้อไหนเป็นจริง

1. $|3+2| \geq 2|3-3|$ 2. $0 < |3| < 3$ 3. $|5-2(3)| > 3$

$5 \geq 0$ ถูก $0 < 3 < 3$ ผิด $1 > 3$ ผิด

4. $(3-1)(3-2) < 0$ 5. $(3+1)(3-5) \geq 0$

$2 < 0$ ผิด $-8 \geq 0$ ผิด

6. ถ้า A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\log_3\left(4^x+137\right) < 2+\log_3\left(1+2^{x+2}\right)$

แล้ว A เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\infty,0)$ 2. $(-2,2)$ 3. $(1,6)$

4. $(3,8)$ 5. $(6,\infty)$

ตอบ 3

วิธีทำ $\log_3\left(4^x+137\right) < 2+\log_3\left(1+2^{x+2}\right)$ แปลง 5 ให้เป็น log ฐาน 3

$\log_3\left(4^x+137\right) < \log_3 9+\log_3\left(1+2^{x+2}\right)$ $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$

$\log_3\left(4^x+137\right) < \log_3(9)\left(1++2^{x+2}\right)$ ตัด $\log_3$ ทั้งสองข้าง

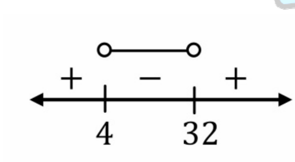
$4^x+137 < (9)\left(1+2^{x+2}\right)$ $(3 > 1$ ไม่ต้องกลับเครื่องหมาย)

$2^{2x}+137 < (9)\left(1+2^x\cdot 2^2\right)$

$2^{2x}+137 < 9+36\cdot 2^x$

$2^{2x}-36\cdot 2^x+128 < 0$

$\left(2^x-4\right)\left(2^x-32\right) < 0$



$2^x \in (4,32)$

$2^x \in \left(2^2,2^5\right)$

$x \in (2,5) \rightarrow$ เป็นสับเซตของ ข้อ 3.

7. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(x)=\begin{cases} x+1, & -1<x<1 \\ 3, & x\geq 1 \end{cases}$

และ $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ เมื่อ $-1<x<1$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $(f\circ g)(x)=3$ สำหรับทุก $x\in(-1,1)$

(ข) $(fg)(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+1$ สำหรับทุก $x\in(-1,1)$

(ค) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=(x+1)\sqrt{1-x^2}$ สำหรับทุก $x\in(-1,1)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

ตอบ 2

วิธีทำ (ก) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\rightarrow$ จะพิจารณาค่าของ $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

เพื่อดูเงื่อนไข $f(x)$

เมื่อ $x\in(-1,1)$ จะได้

$0\leq x^2<1$ คูณ -1 ตลอด (ต้องกลับมากกว่า$\leftrightarrow$น้อยกว่า)

$0\geq -x^2>-1$ บวก 1 ตลอด

$1\geq 1-x^2>0$ ถอดรูทตลอด ($1-x^2>0$ ไม่ต้องกลัวว่าในรูทจะติดลบ)

$1\geq\sqrt{1-x^2}>0$ $\div\sqrt{1-x^2}$ ตลอด $\left(\sqrt{1-x^2}>0\right)$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geq 1 \rangle \ 0$$

จะได้ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geq 1$ ดังนั้น $f\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ ต้องใช้สูตร $\longrightarrow = 3$ จะได้ (ก) ถูก

(ข) $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $\quad$ $x \in (-1,1)$ ดังนั้น $f(x)$ ต้องใช้สูตรบน

$$= (x+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ $\longrightarrow$ ไม่ตรงกับที่ (ข) บอก $\longrightarrow$ (ข) ผิด

(ค) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad$ $x \in (-1,1)$ ดังนั้น $f(x)$ ต้องใช้สูตรบน

$$= \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$= (x+1)\sqrt{1-x^2}$$ $\longrightarrow$ (ค) ถูก

8. ให้ f เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $f(a) > f(2-a)$

(ข) $f(x) < 4$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x < 0$

(ค) f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 2$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ(ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

ตอบ 4

วิธีทำ

(ก) $f(a) > f(2-a)$

$$a^3 - 3a^2 + 4 > (2-a)^3 - 3(2-a)^2 + 4$$

$$a^3 - 3a^2 > (2-a)^3 - 3(2-a)^2$$

$$3(2-a)^2 - 3a^2 > (2-a)^3 - a^3$$

$$3\left[(2-a)^2 - a^2\right] > (2-a)^3 - a^3$$

$$u^2 - a^2 = (u-a)(u+a)$$

$$u^3 - a^3 = (u-a)\left(u^2 + ua + a^2\right)$$

$$3(2-a-a)(2-a+a) > (2-a-a)\left((2-a)^2 + (2-a)a + a^2\right)$$

$$3(2-2a)(2) > (2-2a)\left((2-a)^2 + 2a - a^2 + a^2\right)$$

$0 < a < 1$
ดังนั้น $2-2a$ เป็นบวก
จึงตัดได้โดยไม่ต้องกลับ
มากกว่า $\leftrightarrow$ น้อยกว่า

$$6 > (2-a)^2 + 2a \quad ...(*)$$

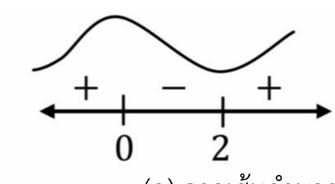
เนื่องจาก $0 < a < 1$ ดังนั้น $(2-a)^2 < 4 \quad ...(1)$

เนื่องจาก $0 < a < 1$ ดังนั้น $2a < 2 \quad ...(2)$

$(1)+(2): (2-a)^2 + 2a < 6 \rightarrow (*)$ จริง ดังนั้น (ก) ถูก

(ข) $f'(x)=3x^2-6x$

$=3x(x-2)$



จะเห็นว่าในช่วง $(-\infty,0]$ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(x)$ เกิดเมื่อ $x=0$

ดังนั้น เมื่อ $x<0$ จะได้ $f(x)<f(0)=0^3-3\left(0^2\right)+4=4\rightarrow$ (ข) ถูก

(ค) จากเส้นคำนวณในข้อ (ข) จะได้ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=2\rightarrow$ (ค) ถูก

9. สำหรับ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ กำหนดให้ $a\otimes b$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีสมบัติดังนี้

(ก) $1\otimes b=b$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก b

(ข) $(1+a)\otimes b=a\otimes(a\otimes b)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก a และ b

ให้ $A=(2\otimes 5)+(5\otimes 9)$

$B=2\otimes(5\otimes(5\otimes 9))$

$C=((9\otimes 5)\otimes 5)\otimes 2$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $A<B+C$
2. $B<C<A$
3. $B<A<C$
4. $C<A<B$
5. $C<B<A$

ตอบ 5

วิธีทำ สังเกตว่า ข้อ (ข) จะใช้ทำให้ตัวเลขฝั่งซ้ายของ $\otimes$ น้อยลง 1 เช่น

$5\otimes 9=(1+4)\otimes 9=4\otimes(4\otimes 9)$

และถ้าใช้ (ข) ไปเรื่อยๆ จนตัวเลขฝั่งซ้ายของ $\otimes$ เหลือ 1 ก็จะใช้ข้อ (ก)

คิดได้ผลลัพธ์ได้เป็นตัวเลขฝั่งขวา

เช่น $2\otimes b=(1+1)\otimes b$ จาก (ข)

$=1\otimes(1\otimes b)$ จาก (ก)

$=1\otimes b$

$2\otimes b=b \quad ...(*)$

$3\otimes b=(1+2)\otimes b$ จาก (ข)

$=2\otimes(2\otimes b)$ จาก(*)

$=2\otimes b$

$3\otimes b=b \quad ...(**)$

$$\begin{aligned} 4\otimes b &= (1+3)\otimes b && \text{จาก(ข)} \\ &= 3\otimes(3\otimes b) && \text{จาก (**)} \\ &= 3\otimes \quad b \end{aligned}$$

$4\otimes b = \quad b \quad \ldots(***)$

จะเห็นว่าเราสามารถทำซ้ำกระบวนการดังกล่าวได้เรื่อยๆ

ดังนั้น จะสรุปได้ว่า $a\otimes b = b$ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

ดังนั้น $A = (2\otimes 5)+(5\otimes 9) = 5 + 9 = 14$

$B = 2\otimes(5\otimes(5\otimes 9)) = 2\otimes(5\otimes 9) = 2\otimes 9 = 9$

$C = ((9\otimes 5)\otimes 5)\otimes 2 = ??? \otimes 2 = 2$

ดังนั้น $C < B < A$

10. กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ

$$|(1+i)(x+yi)-3| = |3(1-i)-x-yi| \text{ เมื่อ } i^2 = -1$$

ค่าของ x^2+y^2 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3
2. 6
3. 9
4. 18
5. 27

ตอบ 3

วิธีทำ

$$\begin{aligned} |(1+i)(x+yi)-3| &= |3(1-i)-x-yi| \\ |x+yi+xi+yi^2-3| &= |3-3i-x-yi| \\ |x-y-3+yi+xi| &= |3-x-3i-yi| \\ |x-y-3+(y+x)i| &= |3-x-(3+y)i| \quad |a\pm bi| = \sqrt{a^2+b^2} \\ \sqrt{(x-y-3)^2+(y+x)^2} &= \sqrt{(3-x)^2+(3+y)^2} \\ (x-y-3)^2+(y+x)^2 &= (3-x)^2+(3+y)^2 \quad \text{ย้ายข้างให้เข้าสูตร } u^2-a^2 \\ (x-y-3)^2-(3+y)^2 &= (3-x)^2-(y+x)^2 \\ (x-y-3+3+y)(x-y-3-3-y) &= (3-x+y+x)(3-x-y-x) \end{aligned}$$

$$(x)(x-2y-6) = (3+y)(3-2x-y)$$

$$x^2-2xy-6x = 9-6x-3y+3y-2xy-y^2$$

$$x^2+y^2 = 9$$

11. ถ้า $\cos\theta = \frac{3}{5}$ และ $\pi < \theta < 2\pi$ แล้ว $100\cot\frac{\theta}{2}\operatorname{cosec}\frac{\theta}{2}\sin\frac{5\theta}{2}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. -41
2. -164
3. -205
4. -328
5. -656

ตอบ 4

วิธีทำ $$100\cot\frac{\theta}{2}\operatorname{cosec}\frac{\theta}{2}\sin\frac{5\theta}{2} = 100\cdot\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\sin\frac{5\theta}{2}$$

$$= 100\cdot\frac{2\sin\frac{5\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= 100\cdot\frac{\sin\left(\frac{5\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{5\theta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}{1-\cos\theta}$$

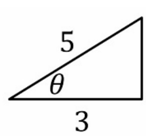
$$= 100\cdot\frac{\sin 3\theta + \sin 2\theta}{1-\cos\theta} \quad ...(*)$$

จะหาค่าที่ต้องใช้มาแทนใน $(*)$ โจทย์ให้ $\pi < \theta < 2\pi$ (คือ Q_3 หรือ Q_4)

แต่ $\cos\theta = \frac{3}{5}$ เป็นบวก $\rightarrow \theta$ อยู่ใน Q_4 จะได้ $\sin\theta$ เป็นลบ

จะข้ามเหลี่ยมมาช่วยหาค่า $\sin\theta$ แล้วค่อยเติมเครื่องหมายลบ ดังนี้

$\cos\theta = \frac{3}{5} = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}$



$\rightarrow 4 \qquad \rightarrow \sin\theta = -\frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = -\frac{4}{5}$

จะได้ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$

และ

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 3\left(-\frac{4}{5}\right) - 4\left(-\frac{4}{5}\right)^3 = -\frac{12}{5} + \frac{256}{125} = \frac{-300+256}{125} = -\frac{44}{125}$$

แทนใน $(*)$ จะได้

$$= 100 \cdot \frac{-\frac{44}{125} + \left(-\frac{24}{25}\right)}{1-\frac{3}{5}} = 100 \cdot \frac{\frac{-44-120}{125}}{1-\frac{3}{5}} = 100 \cdot \left(-\frac{164}{125}\right) \cdot \frac{5}{2} = -328$$

12. ให้ $f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\middle|\, y = \frac{x-1}{\sqrt{2-x-x^2}}\right\}$ เมื่อ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง

โดเมนของ f ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

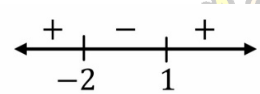
1. $(-\infty, -2)$ 2. $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ 3. $(-2, 1)$
4. $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ 5. $(-1, 2)$

ตอบ 3

วิธีทำ จากในรูท ≥ 0 และ ส่วน $\neq 0$ จะได้ $2 - x - x^2 > 0$

$0 > x^2 + x - 2$

$0 > (x+2)(x-1)$



$\rightarrow x \in (-2, 1)$

13. กำหนดให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $f:\mathbb{R}-\{5\}\rightarrow\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน

โดยที่ $f(x)=\dfrac{5x+3}{x-5}$ สำหรับจำนวนจริง $x\neq 5$ ค่าของ $\left(f^{-1}\circ f^{-1}\right)(1)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $f(0)$
2. $f(-1)$
3. $f(1)$
4. $f(-2)$
5. $f(2)$

ตอบ 4

วิธีทำ $\left(f^{-1}\circ f^{-1}\right)(1) = f^{-1}\left(f^{-1}(1)\right) \longrightarrow$ จงหา f^{-1} ก่อน

$f(x) = \dfrac{5x+3}{x-5}$ คือ $y = \dfrac{5x+3}{x-5}$ หา f^{-1} โดยการสลับ $x \leftrightarrow y$

$$x = \frac{5y+3}{y-5}$$

$$xy-5x = 5y+3$$

$$xy-5y = 5x+3$$

$$y(x-5) = 5x+3$$

$$y = \frac{5x+3}{x-5} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{5x+3}{x-5}$$

ดังนั้น $\left(f^{-1}\circ f^{-1}\right)(1) = f^{-1}\left(f^{-1}(1)\right)$

$$= f^{-1}\left(\frac{5(1)+3}{1-5}\right)$$

$$= f^{-1}(-2)$$

$$= \frac{5(-2)+3}{-2-5} = 1$$

สังเกตว่าตัวเลือกทุกตัว มี f อยู่ $\longrightarrow$ จะหา k ที่ทำให้ $f(k) = 1$

$$k = f^{-1}(1) = \frac{5(1)+3}{1-5} = -2$$

14. กำหนดให้ $P = 4x + 5y$ เป็นฟังก์ชันจุดประสงค์ โดยมีอสมการข้อจำกัด ดังนี้

$x + 2y \geq 10$ $\quad$ $x + y \geq 6$

$3x + y \geq 8$ $\quad$ $x \geq 0$ และ $y \geq 0$

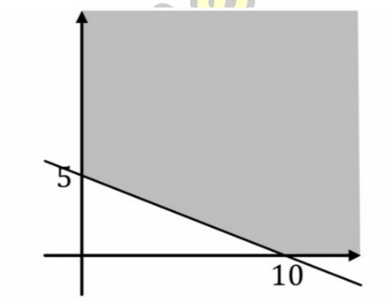
ค่าของ P มีค่าน้อยที่สุด ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

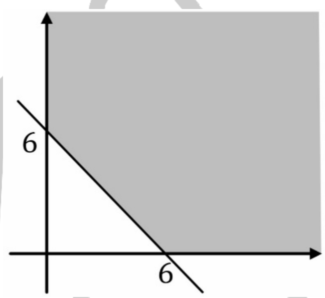
1. 24.0
2. 26.8
3. 28.0
4. 29.0
5. 40.0

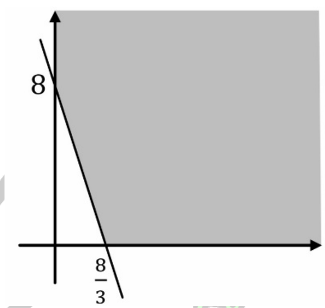
ตอบ 3

วิธีทำ หาจุดตัดแกน x (โดยแทน $y = 0$) และจุดตัดแกน y (โดยแทน $x = 0$) ของแต่ละอสมการ และแรเงาตามเครื่องหมาย ($x \geq 0$ และ $y \geq 0$ แปลว่าเอาเฉพาะใน Q_1 Q_1)

$x + 2y \geq 10$ $\quad$ $x + y \geq 6$ $\quad$ $3x + y \geq 8$



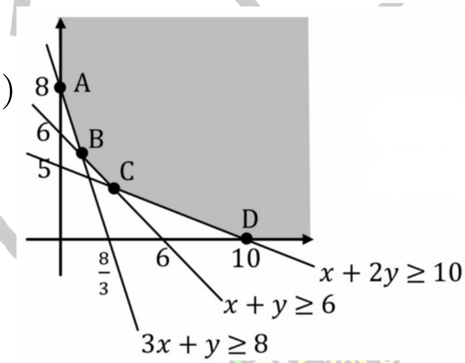




นำรูปทั้ง 3 มาซ้อนกัน จะได้ดังรูป

จะมีจุดมุมคือ $A(0,8)$ และ $D(10,0)$

กับ B กับ C ที่ยังไม่รู้พิกัด



หา B: $3x+y=8$ ...(1)

$x+y=6$ ...(2)

$(1)-(2)$: $2x = 2$

$x = 1$

(2): $1+y = 6$

$y = 5$

จะได้ $B(1,5)$

หา C: $x+y = 6$ ...(2)

$x+2y = 10$ ...(3)

$(3)-(2)$: $y = 4$

(2): $x+4 = 6$

$x = 2$

จะได้ $C(2,4)$

แทนจุดมุมทุกจุดใน $P=4x+5y$ แล้วเลือกจุดที่ได้ค่า P น้อยที่สุด

$A(0,8)$	$P=4(0)+5(8)=40$	
$B(1,5)$	$P=4(1)+5(5)=29$	
$C(2,4)$	$P=4(2)+5(4)=28$	$\longrightarrow$ P น้อยสุด $=28$
$D(10,0)$	$P=4(10)+5(0)=40$	

15. กล่องใบหนึ่งมีลูกแก้วสีแดงเหมือนกัน 4 ลูก และมีลูกแก้วสีน้ำเงินเหมือนกันจำนวนหนึ่ง สุ่มหยิบลูกแก้ว 1 ลูกจากกล่อง ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วสีน้ำเงินเป็นสองเท่าของความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วสีแดง ถ้าสุ่มหยิบลูกแก้ว 2 ลูกจากกล่อง ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วเหมือนกันทั้งสองลูกตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ตอบ 5

วิธีทำ

ในการหยิบ 1 ลูก โจทย์ให้ P(ได้สีน้ำเงิน) $=$ 2P (ได้สีแดง) $\longrightarrow$ แสดงว่าต้องมีลูกแก้วสีน้ำเงินเป็น 2 เท่าของสีแดง

แต่โจทย์กำหนดให้มีสีแดง 4 ลูก ดังนั้น จะมีลูกแก้วสีน้ำเงิน 8 ลูก รวมลูกแก้วทั้งหมด $4+8=12$ ลูก

ถัดมา หยิบ 2 ลูก จะได้จำนวนแบบทั้งหมด $n(S)=\binom{12}{2}=\frac{12\cdot 11}{2}=66$ แบบ

จำนวนแบบที่ได้สีเหมือนกัน จะแบ่งเป็น 2 กรณี

กรณีได้สีแดงเหมือนกันทั้ง 2 ลูก : มีสีแดง 4 ลูก ดังนั้น จะได้จำนวนแบบ $=\binom{4}{2}=\frac{4\cdot 3}{2}=6$ แบบ

กรณีได้สีน้ำเงินเหมือนกันทั้ง 2 ลูก : มีสีน้ำเงิน 8 ลูก ดังนั้น จะได้จำนวนแบบ $=\binom{8}{2}=\frac{8\cdot 7}{2}=28$ แบบ

รวมสองกรณี จะได้ $n(E)=6+28=34$ แบบ

จะได้ความน่าจะเป็น $=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{34}{66}=\frac{17}{33}$

16. ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 กำหนดโดย $A=\begin{bmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{bmatrix}$

เมื่อ a , b และ c เป็นจำนวนจริงบวกที่แตกต่างกัน ค่าของ $\det B$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\det A$
2. $-\det A$
3. $\sqrt{abc}(\det A)$
4. $abc(\det A)$
5. $a^2b^2c^2(\det A)$

ตอบ 1

วิธีทำ ใช้สูตร det ของเมทริกซ์ 3×3

จะได้ $\det A = ab^2+a^2c+bc^2-b^2c-ac^2-a^2b$

และ $\det B = ab^2+bc^2+a^2c-b^2c-ac^2-a^2b$

เท่ากัน

ดังนั้น $\det A=\det B$

<u>หมายเหตุ</u> : ข้อนี้จะใช้วิธีแปลงรูปเมทริกซ์ก็ได้ ดังนี้

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a & a^2 & abc \\ b & b^2 & abc \\ c & c^2 & abc \end{vmatrix} = \frac{a\cdot b\cdot c}{abc}\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$$

คูณ abc ให้หลัก 3

ดึง a ออกจากแถว 1
ดึง b ออกจากแถว 2
ดึง c ออกจากแถว 3

ทรานสโพส $\longrightarrow$ det ไม่เปลี่ยน

17. ให้ P เป็นพาราโบลาซึ่งมีสมการเป็น $x^2+8x+4y+12=0$ ถ้า H เป็นไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางขนานกับแกน Y มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดยอดของ P ระยะทางระหว่างโฟกัสทั้งสองของ H เท่ากับ $4\sqrt{3}$ หน่วย และเส้นกำกับเส้นหนึ่งของ H ขนานกับเส้นตรง $2x-3y-2=0$ แล้วสมการของไฮเพอร์โบลา H รูปนี้ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $9y^2-4x^2-32x-18y-109=0$
2. $9y^2-4x^2+32x-18y-109=0$
3. $9y^2-4x^2-32x+18y-109=0$
4. $9y^2-4x^2-32x-18y-199=0$
5. $9y^2-4x^2-32x+18y+199=0$

ตอบ 4

วิธีทำ จะเห็นว่าต้องใช้จุดยอดของ P มาเป็นศก ของ H $\longrightarrow$ จัดรูป P จะได้

$$x^2+8x = -4y-12$$
$$x^2+8x+16 = -4y-12+16$$
$$(x+4)^2 = -4y+4$$
$$(x+4)^2 = -4(y-1)$$

$\longrightarrow$ จุดยอด $(-4,1)=$ ศก ของ H

โจทย์ให้ H มีแกนตามขวางขนานแกน Y $\longrightarrow$ เป็นไฮเพอร์แนวตั้ง จะได้สมการ

$$\frac{(y-1)^2}{a^2}-\frac{(x+4)^2}{b^2}=1$$

ระยะระหว่างโฟกัส $=4\sqrt{13}$ จะได้ระยะโฟกัส $c=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

จากสูตร $a^2+b^2=c^2$ จะได้ $a^2+b^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2$

$$a^2+b^2=52 \quad ...(*)$$

โจทย์ให้เส้นกำกับเส้นหนึ่ง ขนานกับเส้นตรง $2x-3y-2=0$ $\longrightarrow$ ขนานกัน ความชันเท่ากัน

$$2x-2=3y$$

$$\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}=y \longrightarrow \text{ความชันเส้นตรง}=\frac{2}{3}$$

จากสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{(y-1)^2}{a^2}-\frac{(x+4)^2}{b^2}=1$ จะได้เส้นกำกับคือ $\frac{y-1}{a}=\pm\frac{x+4}{b}$

$$y-1=\pm\frac{a}{b}(x+4) \longrightarrow \text{ความชัน}=\pm\frac{a}{b}$$

ขนานกัน ความชันต้องเท่ากัน ดังนั้น $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ จะได้ $a=\frac{2}{3}b$ $\longrightarrow$ แทนใน $(*)$ จะได้

$$\left(\frac{2}{3}b\right)^2+b^2=52$$

$$\frac{4}{9}b^2+b^2=52$$

$$\frac{13}{9}b^2=52$$

$$b^2=36$$

$$b=6$$

$$a=\frac{2}{3}(6)$$

$$a=4$$

จะได้สมการไฮเพอร์โบลาคือ $\frac{(y-1)^2}{4^2}-\frac{(x+4)^2}{6^2}=1$

$$\frac{3^2\left(y^2-2y+1\right)-2^2\left(x^2+8x+16\right)}{12^2}=1$$

$$9y^2 - 18y + 9 - 4x^2 - 32x - 64 = 144$$

$$9y^2 - 4x^2 - 18y - 32x - 199 = 0$$

18. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมโดยที่มีความยาวด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C เท่ากับ a หน่วย b หน่วย และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า $b = \dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$, $c = \dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ และมุม A มีขนาด 60°

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(ข) $\sin^2 B + \sin^2 C = 1$

(ค) $\sin B + \sin C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

ตอบ 1

วิธีทำ ก. จากกฎของ cos จะได้

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$a^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)\cos 60^\circ$$

$$a^2 = \frac{1}{6+2\sqrt{12}+2} + \frac{1}{6-2\sqrt{12}+2} - 2\left(\frac{1}{6-2}\right)\frac{1}{2}$$

$$a^2 = \frac{1}{8+4\sqrt{3}} + \frac{1}{8-4\sqrt{3}} - \frac{1}{4}$$

$$a^2 = \frac{16}{64-48} - \frac{1}{4}$$

$a^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\longrightarrow$ ก. ถูก

ข. จากกฎของ sin จะได้ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ แต่จากข้อ ก. จะได้

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}/2}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/2} = 1$$

ดังนั้น $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 1$ ซึ่งจะได้ว่า $\sin B = b$ และ $\sin C = c$

จะได้ $\sin^2 B + \sin^2 C = b^2 + c^2$ ในข้อ ก. เราเคยหา $b^2 + c^2$ ไปแล้ว ได้ $= 1$

$= 1$ $\longrightarrow$ ข. ถูก

ค. แทน $\sin B = b$ และ $\sin C = c$ จากขอ ข. จะได้

$$\sin B + \sin C = b + c = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{6-2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}$$ $\longrightarrow$ ค. ผิด

19. กำหนดให้ P เป็นพาราโบลามีสมการเป็น $y = ax^2 + bx + 5$ เมื่อ $a > 0$ และ $b < 0$

ถ้าระยะทางระหว่างโฟกัสกับจุดยอดของ P เท่ากับ $\frac{1}{2}$ หน่วย และเส้นตรง $2x - y - 3 = 0$

สัมผัสกับ P ที่จุด C แล้วระยะทางระหว่างจุดยอดของ P และจุด C ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{2}$ 2. $\sqrt{5}$ 3. $\sqrt{6}$ 4. $\sqrt{8}$ 5. $\sqrt{13}$

ตอบ 4

วิธีทำ จากรูปสมการ $y = ax^2 + bx + 5$ และ $a > 0$ จะได้ว่า P เป็นพาราโบลาหงาย

ดังนั้น จะได้สมการของ P ในรูป $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ เมื่อ $c > 0$

$$(x-h)^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)(y-k)$$

โจทย์ให้ระยะโฟกัส $= \frac{1}{2}$

$$(x-h)^2 = 2\ (y-k)$$

และจาก $y = ax^2 + bx + 5$ จะเห็นว่า เมื่อ $x = 0$ จะได้ $y = a(0^2) + b(0) + 5 = 5$

ดังนั้น $(0,5)$ จะต้องสอดคล้องกับสมการของ P ในรูป $(x-h)^2 = 2(y-k)$ ด้วย

$$(0-h)^2 = 2(5-k)$$

$$h^2 = 10 - 2k \quad ...(*)$$

เนื่องจาก P สัมผัสกับเส้นตรง $2x - y - 3 = 0$ ที่ C แสดงว่าถ้าแก้ระบบสมการ P กับเส้นตรง

จะต้องได้คำตอบเดียว $2x - 3 = y$

แทนสมการของ P $(x-h)^2 = 2(y-k)$

$$(x-h)^2 = 2(2x-3-k)$$

จาก$(*)$ $x^2 - 2xh + h^2 = 4x - 6 - 2k$

$$x^2 - 2xh + 10 - 2k = 4x - 6 - 2k$$

$$x^2 - 2xh - 4x + 16 = 0$$

$$x^2-(2h+4)x+16 = 0 \quad ...(*)(*)$$

ซึ่งจะมีคำตอบเดียว เมื่อ $\left(-(2h+4)\right)^2-4(1)(16) = 0$

สมการ $ax^2+bx+c=0$
จะมีคำตอบเดียวเมื่อ $b^2-4ac=0$

$$(2h+4)^2 = 64$$
$$2h+4 = 8,-8$$

แต่จากสูตรจุดยอดพาราโบลา $y=ax^2+bx+c$ คือ $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ ดังนั้น $h=-\frac{b}{2a}$

แต่โจทย์ให้ a เป็นบวก และให้ b เป็นลบ ดังนั้น $h=-\frac{\text{ลบ}}{2(\text{บวก})}=$ บวก ดังนั้น $h=2,\cancel{-6}$

แทน $h=2$ ใน $(**)$ เพื่อหาจุดสัมผัส C ต่อ จะได้

$$x^2-(2(2)+4)x+16 = 0$$
$$x^2-8x+16 = 0$$
$$(x-4)^2 = 0$$
$$x = 4$$

แทน $x=4$ ในสมการเส้นตรง

$$2x-y-3 = 0$$
$$2(4)-y-3 = 0$$
$$5 = y$$

⇨ จะได้จุดสัมผัสคือ $C(4,5)$

แทน $h=2$ ใน $(*)$ เพื่อหา k จะได้ $2^2 = 10-2k$

$$2k = 6$$
$$k = 3$$

⇨ จะได้จุดยอดของ P คือ $(2,3)$

ดังนั้น ระยะระหว่างจุดยอด $(2,3)$

และจุด $C(4,5)=\sqrt{(4-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$

20. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เมื่อ a , b , c , d เป็นจำนวนจริงใดๆ

โดยที่ $B=A^{-1}BA$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $a+b+c+d=0$ $a+b+c+d=0$ 2. $-a+b+c+d=0$ 3. $a-b+c+d=0$

4. $a+b-c+d=0$ 5. $a+b+c-d=0$

ตอบ 5

วิธีทำ จาก $B = A^{-1}BA$

$AB = BA$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ -a+c & -b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-b & b \\ 2c-d & d \end{bmatrix} \Rightarrow$$

เทียบสมาชิกตำแหน่งต่อตำแหน่ง

$2a = 2a-b$ ...(1)

$2b = b$ ...(2)

$-a+c = 2c-d$ ...(3)

$-b+d = d$ ...(4)

จาก (1) จะได้ $b=0$ ซึ่งจะทำให้ (2) และ (4) จริงไปด้วย

จาก (3) จะได้ $0=a+c-d$

และจาก $b=0$ จะได้ $0=a+b+c-d$ ด้วย $\longrightarrow$ ตรงกับข้อ 5

.

21. ถ้า x_1, x_2, x_3, x_4 เป็นข้อมูลของจำนวนจริงที่เรียงลำดับจากน้อยไปมาก

โดยมีมัธยฐานเท่ากับ 14 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 15 และพิสัยเท่ากับ 8 แล้วสัมประสิทธิ์ของพิสัยของ

ข้อมูล $2x_1 - 4$, $2x_2 - 3$, $2x_3 - 2$, $2x_4 - 1$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ตอบ 4

วิธีทำ $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$

$2x_1 < 2x_2 < 2x_3 < 2x_4$ เมื่อลบด้วยค่าน้อย จะยิ่งมีค่ามาก

$2x_1 - 4 < 2x_2 - 3 < 2x_3 - 2 < 2x_4 - 1$

จะได้ สปส พิสัย ที่โจทย์ถาม

$$= \frac{\max - \min}{\max + \min} = \frac{(2x_4 - 1) - (2x_1 - 4)}{(2x_4 - 1) + (2x_1 - 4)} = \frac{2(x_4 - x_1) + 3}{2(x_4 + x_1) - 5} \quad ...(*)$$

$\longrightarrow$ ต้องหา $x_4 - x_1$ กับ $x_4 + x_1$ มาแทนใน $(*)$

โจทย์ให้ x_1, x_2, x_3, x_4 มีมัธยฐาน $= 14$ จะได้ $\frac{x_2 + x_3}{2} = 14$ ดังนั้น $x_2 + x_3 = 28 \quad ...(1)$

มี $\bar{x} = 15$ จะได้ $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = 15$ ดังนั้น $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 60 \quad ...(2)$

$(2) - (1): \; x_1 + x_4 = 32 \quad ...(3)$

จะมีพิสัย $= 8$ จะได้ $x_4 - x_1 = 8 \quad ...(4)$

แทน (3) และ (4) ลงใน $(*)$ จะได้ สปส พิสัยที่โจทย์ถาม $= \frac{2(8) + 3}{2(32) - 5} = \frac{19}{59}$

22. กำหนดให้เส้นตรง $3x-4y-6=0$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $x+ay+3=0$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง ถ้าเส้นตรงทั้งสองตัดกันที่จุด A และเส้นตรงทั้งสองตัดแกน X ที่จุด B และจุด C ตามลำดับ แล้วพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 6 ตารางหน่วย
2. 8 ตารางหน่วย
3. 10 ตารางหน่วย
4. 12 ตารางหน่วย
5. 14 ตารางหน่วย

ตอบ 1

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 3x-4y-6 &= 0 \\ 3x-6 &= 4y \\ \frac{3}{4}x-\frac{6}{4} &= y \\ \text{ความชัน} &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+ay+3 &= 0 \\ ay &= -x-3 \\ y &= -\frac{1}{a}x-\frac{3}{a} \\ \text{ความชัน} &= -\frac{1}{a} \end{aligned}$$

ตั้งฉากกัน ความชันคูณกันได้ -1

ดังนั้น $\frac{3}{4}\times-\frac{1}{a}=-1$

$$\frac{3}{4} = a$$

หาจุด A ที่เป็นจุดตัดสองเส้นตรง ⟶แก้ระบบสมการ

$$3x-4y-6=0 \quad \ldots(1)$$

$$x+\frac{3}{4}y+3=0 \quad \ldots(2)$$

$$(2)\times 3 \ : \quad 3x+\frac{9}{4}y+9=0 \quad \ldots(3)$$

$$(3)-(1) \ : \quad \frac{9}{4}y+4y+15=0$$

$$\frac{25}{4}y = -15$$

$$y = -\frac{12}{5}$$

$$(2) \ : \quad x+\frac{3}{4}\left(-\frac{12}{5}\right)+3=0$$

$$x = -\frac{6}{5}$$

ดังนั้น จะได้พิกัดจุด A คือ $\left(-\frac{6}{5},-\frac{12}{5}\right)$

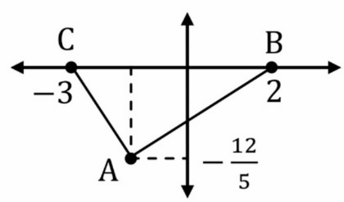
หาจุด B,C ที่เป็นจุดตัดแกน $x \longrightarrow$ แทน $y=0$

$$\begin{aligned} 3x-4y-6 &= 0 \\ 3x-4(0)-6 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+\frac{3}{4}y+3 &= 0 \\ x+\frac{3}{4}(0)+3 &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้พิกัด B,C คือ $(2,0)$ และ $(-3,0)$

นำ A,B,C ไปวาดรูป จะได้



จะได้พื้นที่ $\triangle ABC = \frac{1}{2}\times BC\times h$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\times(2-(-3))\times\left(\frac{12}{5}\right) \\ &= 6 \end{aligned}$$

23. ข้อมูลประชากรชุดหนึ่งประกอบด้วย $x1$, $x2$, ... , $x10$ โดยมีสัมประสิทธิ์ของการแปรผนันเท่า กบั 62.5% และมีความแปรปรวนเท่ากับ 25 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ เท่ากับ 89

(ข) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ $-x1$, $-x2$, ... , $-x10$ เท่ากับ 5

(ค)มีค่าน้อยที่สุด

ข้อใดต่อไปนี้ ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

ตอบ 1

วิธีทำ จากสูตรความแปรปรวน $v = s^2$ ดังนั้น $s^2 = 25$ จากสูตร สปส การแปรผัน $s = \frac{s}{x}$

$s = 5$

ดังนั้น $\frac{s}{\bar{x}} = \frac{62.5}{100}$

$\frac{5}{\bar{x}} = \frac{2.5}{4}$

$8 = \bar{x}$

ก. จากสูตร $s^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - 8^2$

$25 = \frac{\sum x_i^2}{N} - 8^2$

$89 = \frac{\sum x_i^2}{N}$ ดังนั้นค่าเฉลี่ยเลขคณิต $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{10}^2 = 89 \longrightarrow$ (ก) ถูก

ข. การคูณข้อมูลทุกตัวด้วย k จะทำให้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเปลี่ยนเป็น $|k|$ เท่าของของเดิม

ข้อมูล $-x_1, -x_2, \ldots, -x_{10}$ เกิดจากการคูณข้อมูลเดิมทุกตัวด้วย -1

ดังนั้น ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานใหม่ $= |-1|s = |-1|5 = 5 \longrightarrow$ (ข) ถูก

ค. จากสมบัติของ $\bar{x}$ จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{10}(x_i - a)^2$ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $a = \overline{x = 8}$

จึงสรุปไม่ได้ว่า $\sum_{i=1}^{10}(x_i - 5)^2$ มีค่าน้อยที่สุด $\longrightarrow$ (ค) ผิด

24. กำหนดให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ โดยที่ $\vec{a}\cdot\vec{b}=15$, $\left|\vec{a}\right|=6$ และ $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=32$

ค่าของ $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4
2. $\sqrt{76}$
3. 9
4. $\sqrt{106}$
5. $\sqrt{136}$

ตอบ 2

วิธีทำ การดอท สามารถกระจายในการบวกลบเวกเตอร์ได้ ดังนั้น

$$\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = 32$$

$$2\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b} = 32$$

$$2\left|\vec{a}\right|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-\left|\vec{b}\right|^2 = 32$$

$$2\left(6^2\right)-15-\left|\vec{b}\right|^2 = 32$$

$$25 = \left|\vec{b}\right|^2$$

$$5 = \left|\vec{b}\right|$$

และจากสูตร $\left|\bar{u}-\bar{v}\right|^2 = \left|\bar{u}\right|^2+\left|\bar{v}\right|^2-2\bar{u}\cdot\bar{v}$

จะได้ $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|^2+\left|2\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot2\vec{b}$

$$= \left|\vec{a}\right|^2+4\left|\vec{b}\right|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$= 6^2+4\left(5^2\right)-4(15)$$

$$=76$$

ดังนั้น $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{76}$

25. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_1 = 1$ และ $a_n = 2a_{n-1} + 3$

สำหรับ $n = 2, 3, 4, ...$ ค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+2} - a_{n+1}}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. 0.5 3. 1 4. 2.5 5. 4

ตอบ 2

วิธีทำ จัดรูป $\dfrac{a_n}{a_{n+2} - a_{n+1}}$ โดยจะย้อน $a_{n+2} \longrightarrow a_{n+1} \longrightarrow a_n$ ตามลำดับ

จาก $a_n = 2a_{n-1} + 3$

แทน n ด้วย $n+2$

$a_{n+2} = 2a_{n+2-1} + 3$

$= 2a_{n+1} + 3$

แทน n ด้วย $n+1$

$a_{n+1} = 2a_{n+1-1} + 3$

$= 2a_n + 3$

ดังนั้น

$$\frac{a_n}{a_{n+2} - a_{n+1}} = \frac{a_n}{2a_{n+1} + 3 - a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1} + 3} = \frac{a_n}{2a_n + 3 + 3}$$

$$= \frac{a_n}{2a_n + 6} = \frac{a_n}{a_n\left(2 + \frac{6}{a_n}\right)} = \frac{1}{2 + \frac{6}{a_n}}$$

(ดึง a_n ออกมาตัดกับข้างบน)

จาก $a_1 = 1$ และ $a_n = 2a_{n-1} + 3$ จะเห็นว่าแต่ละพจน์ จะเพิ่มขึ้นแบบทวีคูณ (2 เท่า บวก 3)

ดังนั้น ลำดับ a_n จะเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต ทำให้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ซึ่งจะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6}{a_n} = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+2} - a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2 + \frac{6}{a_n}} = \dfrac{1}{2+0} = \dfrac{1}{2} = 0.5$

26. ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ $\int_{-1}^{1} a\left(1-x^2\right)dx = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$

แล้ว a ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2\pi}{5}$ 2. $\frac{2\pi}{7}$ 3. $\frac{3\pi}{7}$ 4. $\frac{\pi}{3}$ 5. $\frac{3\pi}{8}$

ตอบ 5

วิธีทำ

$$\int_{-1}^{1} a\left(1-x^2\right)dx$$

$$= a\int_{-1}^{1} 1-x^2 dx$$

$$= a\left(x-\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1}\right)$$

$$= a\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1-\frac{-1}{3}\right)\right)$$

$$= a\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{4a}{3}$$

$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx \longrightarrow$ จะอินทิเกรตไม่ออก

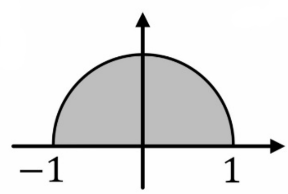
ต้องหาจากพื้นที่ใต้กราฟ $y = \sqrt{1-x^2}$ ตั้งแต่ $x = -1$ ถึง 1

$$y^2 = 1-x^2 \;;\; y \geq 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

เป็นวงกลมที่ $y \geq 0$

เพราะ $y =$ ผลรูท จะเป็นลบไม่ได้



ดังนั้น $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx =$ พื้นที่ครึ่งวงกลม รัศมี 1 หน่วย (ครึ่งบน)

$$= \frac{1}{2}\pi\left(1^2\right) = \frac{\pi}{2}$$

โจทย์ให้ทั้งสองฝั่งเท่ากัน ดังนั้น $\frac{4a}{3} = \frac{\pi}{2}$ ซึ่งจะได้ $a = \frac{3\pi}{8}$

27. ให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\left(\log_9 4\right)^{x^2+2x} < \left(2^{2\log_2\left(\log_3 2\right)}\right)^{16-x}$

แล้ว A เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\infty,-9)\cup(3,\infty)$ 2. $(-\infty,-7)\cup(4,\infty)$ 3. $(0,\infty)$

4. $(-\infty,1)$ 5. $(-9,5)$

ตอบ 2

วิธีทำ $\left(\log_9 4\right)^{x^2+2x} < \left(2^{2\log_2\left(\log_3 2\right)}\right)^{16-x}$ $n\log_a x = \log_a x^n$

$\left(\log_{3^2} 2^2\right)^{x^2+2x} < \left(2^{\log_2\left(\log_3 2\right)^2}\right)^{16-x}$ $a^{\log_a x} = x$

$\left(\frac{2}{2}\log_3 2^2\right)^{x^2+2x} < \left(\left(\log_3 2\right)^2\right)^{16-x}$ $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

$\left(\log_3 2\right)^{x^2+2x} < \left(\log_3 2\right)^{32-2x}$

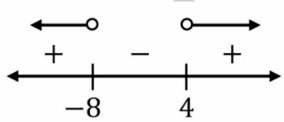
ตัด $\log_3 2$ ทั้งสองข้าง

เนื่องจาก $\log_3 2 < 1$ จึงต้องกลับ น้อยกว่า เป็น มากกว่า

$x^2+2x > 32-2x$

$x^2+4x-32 > 0$

$(x+8)(x-4) > 0$



จะได้เซตคำตอบ คือ $(-\infty,-8)\cup(4,\infty)$

ซึ่งจะเป็นสับเซตของ $(-\infty,-7)\cup(4,\infty)$ ในข้อ2.

28. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{59}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_{i+1} - a_i = \ldots = a_{59} - a_{58}$$

ให้ $b_1 = a_1$ และ $b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$ สำหรับ $n = 2,3,4,\ldots,60$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $b_4 = 3a_1 + a_4$

(ข) $b_1 + b_2 + b_3 = 5a_1 + a_2$

(ค) $b_{60} = a_1 + 59a_{30}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

ตอบ 4

วิธีทำ

จาก $b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$ แทน $n = 2$ จะได้ $b_2 = b_1 + a_1 = 2a_1$

แทน $n = 3$ จะได้ $b_3 = b_2 + a_2 = 2a_1 + a_2$

แทน $n = 4$ จะได้ $b_4 = b_3 + a_3 = 2a_1 + a_2 + a_3$

แทน $n = 5$ จะได้ $b_5 = b_4 + a_4 = 2a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$\vdots$

จะเห็นว่า $b_n = 2a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}$

จาก $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots$ จะเห็นว่าแต่ละพจน์ของลำดับ เพิ่ม-ลด อย่างคงที่เท่าๆกัน ดังนั้น จะได้ว่าลำดับ a_n เป็นลำดับเลขคณิต $\longrightarrow$ สมมติให้ผลต่างร่วม $= d$ จะได้ $a_n = a_1 + (n-1)d$

ก)

$$\begin{aligned} b_4 &= 3a_1 + a_4 \\ 2a_1 + a_2 + a_3 &= 3a_1 + a_4 \\ 2a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) &= 3a_1 + a_1 + 3d \\ 4a_1 + 3d &= 4a_1 + 3d \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ ก. ถูก

ข)

$$b_1+b_2+b_3 = 5a_1+a_2$$
$$a_1+2a_1+(2a_1+a_2) = 5a_1+a_2$$
$$5a_1+a_2 = 5a_1+a_2$$

$\longrightarrow$ ข. ถูก

ค)

$$b_{60} = a_1+59a_{30}$$
$$2a_1+a_2+a_3+...+a_{59} = a_1+59a_{30}$$
$$a_1+(a_1+a_2+a_3+...+a_{59}) = a_1+59a_{30}$$
$$a_1+\frac{59}{2}(2a_1+58d) = a_1+59(a_1+29d)$$
$$a_1+59a_1+59(29)d = a_1+59a_1+59(29d)$$

$\longrightarrow$ ค. ถูก

29. มีหนังสือวิชาคณิตศาสตร์ต่างกัน 3 เล่ม หนังสือวิชาภาษาไทยต่างกัน 2 เล่ม และหนังสือภาษาอังกฤษเหมือนกัน 5 เล่ม ถ้าต้องการจัดเรียงหนังสือ 5 เล่มวางบนชั้น โดยมีหนังสือแต่ละวิชาอย่างน้อย 1 เล่ม และมีจำนวนหนังสือวิชาคณิตศาสตร์และหนังสือวิชาภาษาไทยรวมกันอย่างมาก 3 เล่ม จำนวนวิธีจัดเรียงหนังสือ 5 เล่มดังกล่าวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 360 วิธี
2. 390 วิธี
3. 660 วิธี
4. 680 วิธี
5. 740 วิธี

ตอบ 3

วิธีทำ โจทย์ให้ คณิต $+$ ไทย มีได้อย่างมาก 3 เล่ม แต่ต้องมีวิชาละ 1 เล่มเป็นอย่างน้อย ดังนั้น จะแบ่งได้เป็น 3 กรณี คือ

"คณิต 1 เล่ม ไทย 1 เล่ม" , "คณิต 2 เล่ม ไทย 1 เล่ม" และ "คณิต 1 เล่ม ไทย 2 เล่ม"

กรณี คณิต 1 เล่ม ไทย 1 เล่ม :

เลือกคณิต 1 เล่ม จาก 3 เล่ม และเลือกตำแหน่งวางจาก 5 ตำแหน่ง $\longrightarrow$ เลือกได้ 3×5 แบบ

เลือกไทย 1 เล่ม จาก 2 เล่ม และเลือกตำแหน่งวางจาก 4 ตำแหน่งที่เหลือ $\longrightarrow$ เลือกได้ 2×4 แบบ

ที่เหลือ 3 ตำแหน่ง เอาอังกฤษวาง (ไม่ต้องเลือกอังกฤษ เพราะอังกฤษเหมือนกันทุกเล่ม)

รวมจำนวนแบบ $=3\times5\times2\times4=120$ แบบ

กรณี คณิต 2 เล่ม ไทย 1 เล่ม :

เลือกคณิต 2 เล่ม จาก 3 เล่ม เล่มแรกเลือกวางได้ 5 ตำแหน่ง

เล่มที่สองเลือกวางได้ 4 ตำแหน่ง $\longrightarrow$ รวมเลือกได้ $\binom{3}{2}\times 5\times 4$ แบบ

เลือกไทย 1 เล่ม จาก 2 เล่ม และเลือกตำแหน่งวางจาก 3 ตำแหน่งที่เหลือ $\longrightarrow$ เลือกได้ 2×3 แบบ

รวมจำนวนแบบ $=\binom{3}{2}\times 5\times 4\times 2\times 3=360$ แบบ

กรณี คณิต 1 เล่ม ไทย 2 เล่ม :

เลือกคณิต 1 เล่ม จาก 3 เล่ม และเลือกตำแหน่งวางจาก 5 ตำแหน่ง $\longrightarrow$เลือกได้ 3×5 แบบ

เลือกไทย 2 เล่ม จาก 2 เล่ม เล่มแรกเลือกวางได้ 4 ตำแหน่ง

เล่มที่สองเลือกวางได้ 3 ตำแหน่ง $\longrightarrow$ รวมเลือกได้ $\binom{2}{2}\times 4\times 3$ แบบ

รวมจำนวนแบบ $=3\times 5\times\binom{2}{2}\times 4\times 3=180$ แบบ

รวมจำนวนแบบทั้งหมด $=120+360+180=660$ แบบ

30. ให้ A เป็นเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ

$$2\log_{\frac{1}{4}}(4x+24)+\log_2\left(8-4x-x^2\right)=0$$

ถ้า a เป็นจำนวนเต็มในเซต A ที่มีค่ามากที่สุด แล้วค่าของ $(a+1)^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 4 3. 9 4. 16 5. 25

ตอบ 3

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
2\log_{\frac{1}{4}}(4x+24)+\log_2\left(8-4x-x^2\right) &= 0\\
2\log_{2^{-2}}(4x+24)+\log_2\left(8-4x-x^2\right) &= 0\\
\frac{2}{-2}\log_2(4x+24)+\log_2\left(8-4x-x^2\right) &= 0\\
-\log_2(4x+24)+\log_2\left(8-4x-x^2\right) &= 0\\
\log_2\left(8-4x-x^2\right)-\log_2(4x+24) &= 0\\
\log_2\frac{8-4x-x^2}{4x+24} &= 0\\
\frac{8-4x-x^2}{4x+24} &= 0\\
8-4x-x^2 &= 1(4x+24)\\
0 &= x^2+8x+16\\
0 &= (x+4)^2\\
x &= -4
\end{aligned}$$

$\log_{a^n} x=\frac{1}{n}\log_a x$

$\log_a x-\log_a y=\log_a\frac{x}{y}$

คำตอบต้องไม่ทำให้หลัง log เป็นลบหรือศูนย์ $\log_{\frac{1}{4}}(4x+24)$: $4(4)+24=8 \rangle 0$ (ถูก)

$\log_2\left(8-4x-x^2\right): 8-4(4)-(-4)^2=8 \rangle 0$ (ถูก)

ดังนั้น -4 เป็นคำตอบได้ จะได้ $(a+1)^2=(-4+1)^2=9$

31. ให้ S' แทนคอมพลีเมนต์ของเซต S และ $n(S)$ แทนจำนวนสมาชิกของเซต S

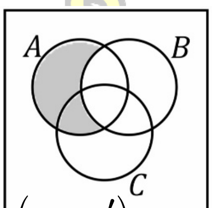
กำหนดให้ U แทนเอกภพสัมพัทธ์ โดยที่ $n(U)=70$ ถ้า A , B และ C เป็นสับเซตของ U

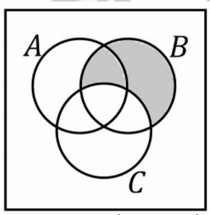
โดยที่ $A\cap B\cap B\neq\varnothing$ และ $n\left(A\cap B'\right)=25$, $n(B-C)=18$, $n\left(C\cap A'\right)=16$

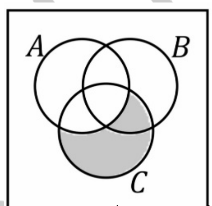
และ $n\left((A\cup B)'-C\right)=7$ แล้ว $n(A\cap B\cap C)$ เท่ากับเท่าใด

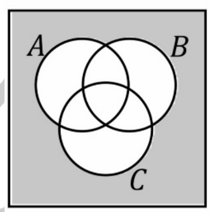
ตอบ 4

วิธีทำ









$n\left(A\cap B'\right)=25$ $\qquad n(B-C)=18$ $\qquad n\left(C\cap A'\right)=16$

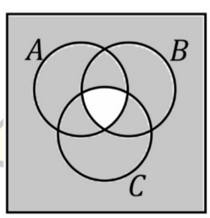
$n\left((A\cup B)'-C\right)=7$

$=A-B$ $\qquad =C-A$ $\qquad =(A\cup B)'\cap C'$

$=(A\cup B\cup C)'$

ถ้านำส่วนที่แรเงาทั้ง รูปมารวมกัน

จะได้เกือบครบทุกส่วน (ยกเว้นตรงกลาง) ดังรูป



$=25+18+16+7$

$=66$

แต่โจทย์ให้ทุกส่วนรวมกัน $n(U)=70$ $\longrightarrow$ จะเหลทอตรงกลาง $n(A\cap B\cap C)=70-66=4$

32. ให้เวกเตอร์ $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ เมื่อ a , b และ c เป็นจำนวนจริง และให้เวกเตอร์ $\vec{u}=\vec{i}-\vec{k}$ และ $\vec{w}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ ถ้าเวกเตอร์ $\vec{v}$ มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\vec{u}\times\vec{w}$ และขนาดของเวกเตอร์ $\vec{v}$ เท่ากับ $6\sqrt{2}$ หน่วย แล้วค่าของ $a-b+c$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 12

> เวกเตอร์ขนาด k หน่วย ในทิศ $\vec{u}$ คือ $\frac{k}{|\vec{u}|}\vec{u}$

วิธีทำ $\vec{u}\times\vec{w}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(0)(2)-(-1)(1)\\(-1)(2)-(1)(2)\\(1)(1)-(0)(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-4\\1\end{bmatrix}$

ดังนั้น $|\vec{u}\times\vec{w}|=\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

จะได้เวกเตอร์ขนาด $6\sqrt{2}$ หน่วย ในทิศ $\vec{u}\times\vec{w}$ คือ $\frac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-4\\1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\-4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-8\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$

ดังนั้น $a-b+c=2-(-8)+2=12$

33. ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+a}{3^{n-1}}=\frac{21}{2}$ แล้วค่าของ a เท่ากับเท่าใด

ตอบ 4

วิธีทำ

กระจายซิกมา จะได้ $\frac{1^2+a}{3^0}+\frac{2^2+a}{3^1}+\frac{3^2+a}{3^2}+\frac{4^2+a}{3^3}+\ \dots\ =\frac{21}{2}$ ...(1)

หาร 3 ตลอดให้ตำแหน่งเลื่อน $\frac{1^2+a}{3^1}+\frac{2^2+a}{3^2}+\frac{3^2+a}{3^3}+\frac{4^2+a}{3^4}+\dots=\frac{7}{2}$ ...(2)

$(1)-(2):\quad \frac{1^2+a}{3^0}+\frac{2^2-1^2}{3^1}+\frac{3^2-2^2}{3^2}+\frac{4^2-3^2}{3^3}+\dots=\frac{14}{2}$

$\frac{a}{3^0}+\frac{1}{3^0}+\frac{3}{3^1}+\frac{5}{3^2}+\frac{7}{3^3}+\dots=7$ ...(3)

$$\frac{a}{3^0}+\frac{1}{3^0}+\frac{3}{3^1}+\frac{5}{3^2}+\frac{7}{3^3}+\dots = 7 \quad \dots(3)$$

หาร 3 ตลอดอีกรอบ $$\frac{a}{3^1}+\frac{1}{3^1}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\frac{7}{3^4}+\dots = \frac{7}{3} \quad \dots(4)$$

$(3)-(4)$: $$\frac{a}{3^0}+\frac{1}{3^0}-\frac{a}{3^1}+\frac{2}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\dots = 7-\frac{7}{3}$$

อนุกรมเรขาคณิตอนันต์ $a_1=\frac{2}{3}$ และ $r=\frac{1}{3} \longrightarrow$ จะได้ผลบวก $=\frac{a_1}{1-r}$

$$a+1-\frac{a}{3}+\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{14}{3}$$

$$\frac{2a}{3}+1+1 = \frac{14}{3}$$

$$\frac{2a}{3} = \frac{8}{3}$$

$$a = 4$$

34. ให้ A เป็นเซตของจำนวนจริง $x \in (0, 2\pi)$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $\cos 2x + \sin x = \tan 225^\circ$ ถ้า θ เป็นผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต A แล้วค่าของ $\cos\theta - \cos\frac{\theta}{3}$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 1.5

วิธีทำ

$$\cos 2x + \sin x = \tan 225^\circ$$

$$1 - 2\sin^2 x + \sin x = 1$$

$$0 = 2\sin^2 x - \sin x$$

$$0 = \sin x(2\sin x - 1)$$

$\sin x = 0$ หรือ $\sin x = \frac{1}{2}$

$x \in (0, 2\pi) \rightarrow x = 0, \pi$ $\quad x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

จะได้ผลบวกคำตอบ $\theta = 0 + \pi + \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = 2\pi$

ดังนั้น $\cos\theta - \cos\frac{\theta}{3} = \cos 2\pi - \cos\frac{2\pi}{3}$

$$= 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1.5$$

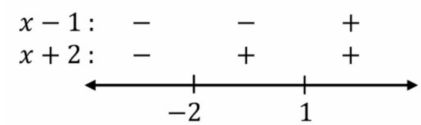
35. กำหนดให้ $f(x) = |x-1| + |x+2|$ เมื่อ $-3 \leq x \leq 3$ ค่าของ $\int_{-3}^{3} f(x)dx$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 23

วิธีทำ

จะแบ่งการอินทิเกรตในช่วง $[3,-3]$ ที่ $x=1$ และ -2

เพื่อให้รู้เครื่องหมายบวกลบของ $x-1$ และ $x+2$ ที่อยู่ในค่าสัมบูรณ์



แล้วใช้สมบัติ $|a| = \begin{cases} a & ,a \geq 0 \\ -a & ,a < 0 \end{cases}$ เพื่อถอดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์

$$\int_{-3}^{3} f(x)dx = \int_{-3}^{-2} f(x)dx + \int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx$$

$$= \int_{-3}^{-2} -(x-1)-(x+2)dx + \int_{-2}^{1} -(x-1)+(x+2)dx + \int_{1}^{3} (x-1)+(x+2)dx$$

$$= \int_{-3}^{-2} -2x-1 \; dx + \int_{-2}^{1} 3dx + \int_{1}^{3} 2x+1 \; dx$$

$$= -x^2 - x \Big|_{-3}^{-2} + 3x \Big|_{-2}^{1} + x^2 + x \Big|_{1}^{3}$$

$$= \left(-(2)^2 - (-2)\right) - \left(-(-3)^2 - (-3)\right) + 3(1) - 3(-2) + \left(3^2 + 3\right) - \left(1^2 + 1\right)$$

$$= 4 + 9 + 10$$

$$= 23$$

36. ค่าของ $13\sin\left(2\arctan\frac{2}{3}\right)+4\tan^2\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 17

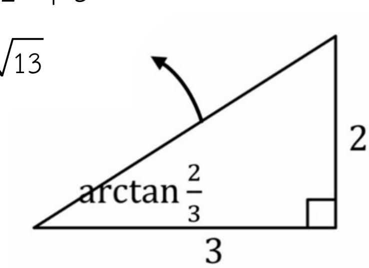
วิธีทำ หลัง arc เป็นบวก จะได้ผลลัพธ์เป็นมุมในจตุภาคที่ 1

วาดสามเหลี่ยมได้โดยไม่ต้องห่วงเครื่องหมาย

$\arctan\frac{2}{3}$ คือมุมที่ tan แล้วได้ $\frac{2}{3}\left(=\frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}\right)$ $\longrightarrow$ วาดสามเหลี่ยมได้ดังรูป

พีทากอรัส จะได้ด้านที่เหลือ $=\sqrt{13}$ $\qquad =\sqrt{2^2+3^2}$

$\qquad\qquad =\sqrt{13}$



ดังนั้น $\sin\left(\arctan\frac{2}{3}\right)=\frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$

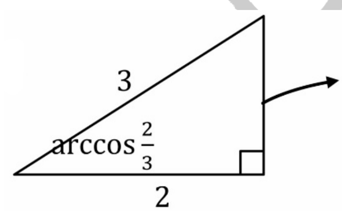
$\cos\left(\arctan\frac{2}{3}\right)=\frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$

จะได้ $\sin\left(2\arctan\frac{2}{3}\right)=2\sin\left(\arctan\frac{2}{3}\right)\cos\left(\arctan\frac{2}{3}\right)$ $\qquad \boxed{\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta}$

$$=2\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)=\frac{12}{13}$$

ทำนองเดียวกัน $\arccos\frac{2}{3}$ คือมุมที่ cos แล้วได้ $\frac{2}{3}\left(=\frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}\right)$

$\longrightarrow$ วาดสามเหลี่ยมได้ดังรูป



$=\sqrt{3^2-2^2}$

$=\sqrt{5}$ $\qquad$ จะได้ $\tan\left(\arccos\frac{2}{3}\right)=\frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

แทนค่าในโจทย์ จะได้ $13\sin\left(2\arctan\frac{2}{3}\right)+4\tan^2\left(\arccos\frac{2}{3}\right)=13\left(\frac{12}{13}\right)+4\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=17$

37. ให้ A แทนเซตของจำนวนจริงทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ

$\sqrt{3x-5}+\sqrt{4x+3}=\sqrt{2x-3}+\sqrt{5x+1}$ และให้ $B=\left\{x^2 \mid x\in A\right\}$

ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดใน B เท่ากับเท่าใด

ตอบ 4

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\sqrt{3x-5}+\sqrt{4x+3} &= \sqrt{2x-3}+\sqrt{5x+1} \\
\left(\sqrt{3x-5}+\sqrt{4x+3}\right)^2 &= \left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{5x+1}\right)^2 \\
3x-5+2\sqrt{(3x-5)(4x+3)}+4x+3 &= 2x-3+2\sqrt{(2x-3)(5x+1)}+5x+1 \\
7x-2+2\sqrt{(3x-5)(4x+3)}+4x+3 &= 7x-2+2\sqrt{(2x-3)(5x+1)} \\
2\sqrt{12x^2-11x-15} &= 2\sqrt{10x^2-13x-3} \\
12x^2-11x-15 &= 10x^2-13x-3 \\
2x^2+2x-12 &= 0 \\
x^2+x-6 &= 0 \\
(x+3)(x-2) &= 0 \\
x &= -3,2
\end{aligned}
$$

แต่คำตอบต้องไม่ทำให้ในรูทติดลบ $\longrightarrow$ จะเห็นว่า $x=-3$ ใช้ไม่ได้

เพราะจะทำให้ $\sqrt{3x-5}=\sqrt{3(-3)-5}=\sqrt{-14}$

ส่วน $x=2$ จะทำให้ในรูททั้ง 4 ตัวเป็นบวกทั้งหมด จึงใช้ได้ (จะตรวจคำตอบก็ได้ แต่ถ้าทั้ง 4 ตัวเป็นบวกหมด จะทำให้ทั้งสองข้างของสมการเป็นบวกก่อนยกกำลังสองทั้งสองรอบ จึงไม่จำเป็นต้องตรวจ)

จะได้ $A=\{2\}$ ดังนั้น $B=\left\{2^2\right\}=\{4\}$ $\longrightarrow$ จะได้ผลบวกสมาชิกของ B คือ 4

38. จากการสำรวจคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ (x_i) และคะแนนสอบวิชาภาษาอังกฤษ (y_i) ของนักเรียน

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 8 คน พบว่า มีความสัมพันธ์เป็นสมการ $y_i = 10 + 2.5x_i$ เมื่อ $i = 1,2,3,...,8$ ถ้านักเรียนทั้ง 8 คนสอบวิชาคณิตศาสตร์ได้คะแนนเรียงลำดับจากน้อยไปมากดังนี้

$25 , 32 , 48 , 50 , a , a+3 , a+4 , a+6$ คะแนน ตามลำดับ

เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มบวก และมัธยฐานของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ชุดนี้เท่ากับ 51 คะแนน แล้วผลบวกของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์และค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบวิชาภาษาอังกฤษ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 174.5

วิธีทำ มีข้อมูล 8 ตัว ดังนั้น มัธยฐานจะอยู่ตัวที่ $\frac{8+1}{2} = 4.5$

จะได้ มัธยฐาน $= \frac{\text{ตัวที่ 4} + \text{ตัวที่ 5}}{3}$

$$51 = \frac{50+a}{2}$$

$$102 = 50 + a$$

$$52 = a$$

ดังนั้น คะแนนคณิตศาสตร์ คือ 25 , 32 , 48 , 50 , 52 , 55 , 56 , 58

จะได้ค่าเฉลี่ยคณิตศาสตร์ $\bar{x} = \frac{25+35+48+50+52+55+56+58}{8} = \frac{376}{8} = 47$

และจาก $y_i = 10 + 2.5x_i$ $\longrightarrow$ ใช้สมบัติของค่าเฉลี่ย จะได้ว่า $\bar{y}$ กับ $\bar{x}$ จะต้องมีความสัมพันธ์แบบเดียวกันด้วย

นั่นคือ จะได้ $\bar{y} = 10 + 2.5\bar{x} = 10 + 2.5(47) = 10 + 117.5 = 127.5$

ดังนั้น $\bar{x} + \bar{y} = 47 + 127.5 = 174.5$

39. กำหนดข้อมูล 2 ชุด คือ ข้อมูล (x) และข้อมูล (y) ดังนี้

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5 y

โดยที่ $1 \le x_i \le 25$ สำหรับ $i = 1,2,3,4,5$

$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 175$, $\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 1575$, $\sum_{1}^{5} (x_i y_i) = 275$, $\sum_{i=1}^{5} (20x_i - y_i) = 250$

และข้อมูลทั้งสองชุดมีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเส้นตรงคือ $y = mx + c$

เมื่อ m , c เป็นจำนวนจริง ถ้า $x = 4$ แล้วค่าประมาณของ y จะเท่ากับเท่าใด

ตอบ 43.5

วิธีทำ กระจาย $\sum$ เพื่อสร้างระบบสมการ และหา $\sum x_i$ กับ $\sum y_i$ ก่อน

$\rightarrow$จาก $\sum (x_i + y_i) = 275$ จะได้ $\sum x_i + \sum y_i = 275$ ...(1)

$\rightarrow$จาก $\sum (20x_i + y_i) = 250$ จะได้ $20\sum x_i - \sum y_i = 250$ ...(2)

$$(1)+(2): \quad 21\sum x_i = 525$$

$$\sum x_i = 25$$

แทนใน (1) : $25 + \sum y_i = 275$

$$\sum y_i = 250$$

แทนค่า $\sum$ ที่หาได้ ในสูตรความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเส้นตรง

$$\sum y_i = m\sum x_i + nc$$

$$\sum x_i y_i = m\sum x_i^2 + c\sum x^i$$

จะได้ $250 = m(25) + 5c \quad ...(3)$

$1575 = m(175) + c(25) \quad ...(4)$

$(3) \div 5: \quad 50 = 5m + c \quad ...(5)$

$(4) \div 25: \quad 63 = 7m + c \quad ...(6)$

$(6) - (5): \quad 13 = 2m$

$6.5 = m$

แทนใน $(5): \quad 50 = 5(6.5) + c$

$17.5 = c$

จะได้สมการ คือ $\hat{y} = 6.5x + 17.5 \longrightarrow$ เมื่อ $x = 4$ จะได้ $\hat{y} = 6.5(4) + 17.5 = 43.5$

40. ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่ง คะแนนสอบมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ a และ bคะแนน ตามลำดับ นาย ก. และนาย ข. เป็นนักเรียนในห้องนี้ นาย ก. สอบวิชาคณิตศาสตร์ครั้งนี้ได้คะแนน 68 คะแนน คิดเป็นค่ามาตรฐานเท่ากับ 1.5 ถ้าครูผู้สอนวิชานี้ ปรับคะแนนใหม่ โดยเพิ่มคะแนนของนักเรียนทุกคนเป็นสองเท่าของคะแนนเดิม คะแนนใหม่ของนาย ข. มากกว่าคะแนนใหม่ของนาย ก. อยู่ 6 คะแนน และคะแนนใหม่ของนาย ข. คิดเป็นค่ามาตรฐานเท่ากับ 1.9 แล้วค่าของ $a + b$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 64.25

วิธีทำ $x = 68$ คิดเป็น $z = 1.5$ ดังนั้น $1.5 = \dfrac{68 - \bar{x}}{s} = \dfrac{68 - a}{b}$

$1.5b = 68 - a \quad ...(1)$

ปรับคะแนนทุกคนเป็น 2 เท่า $\longrightarrow$ คะแนนใหม่ นาย ก. $= 2(68) = 136$

$\longrightarrow \bar{x}_{ใหม่} = 2\bar{x}_{เก่า} = 2a$

$\longrightarrow s_{ใหม่} = 2s_{เก่า} = 2b$

คะแนนใหม่ นาย ข. มากกว่าคะแนนใหม่นาย ก. อยู่ 6 คะแนน

$\longrightarrow$ คะแนนใหม่ นาย ข. $= 136 + 6 = 142$

คะแนนใหม่ นาย ข. คิดเป็น $z = 1.9$ ดังนั้น

$$1.9=\frac{142-\bar{x}_{ใหม่}}{s_{เก่า}}=\frac{142-2a}{2b}=\frac{2(71-a)}{2b}=\frac{71-a}{b}$$

$$1.9b = 71-a \quad ...(2)$$

$(2)-(1):\quad 1.9b-1.5b = (71-a)-(68-a)$

$$0.4b = 3$$

$$b = 7.5$$

แทนใน $(1): 1.5(7.5) = 68-a$

$$a = 68-11.25 = 56.75$$

ดังนั้น $a+b=56.75+7.5 = 64.25$

41. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนจริง

ให้ $u_k = \sum_{n=k}^{2k} a_n$ สำหรับ $k = 1, 2, 3, ...$

ถ้า $u_5 = 147$ และ $u_8 = 342$ แล้วค่าของ $\sum_{n=1}^{60} a_n$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 5610

วิธีทำ จาก $u_k = \sum_{n=k}^{2k} a_n$ จะได้ $u_5 = \sum_{n=5}^{10} a_n = a_5 + a_6 + ... + a_{10}$

โจทย์ให้ $u_5 = 147$ ดังนั้น $a_5 + a_6 + ... + a_{10} = 147$

เติม a_1, a_2, a_3, a_4 ทั้งสองฝั่ง เพื่อให้ฝั่งซ้ายครบ 10 ตัวแรก

$$a_1 + a_2 + ... + a_4 + a_5 + a_6 + ... + a_{10} = 147 + a_1 + a_2 + ... + a_4$$

$$S_{10} = 147 + S_4$$

อนุกรมเลขคณิต
$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

$$\frac{10}{2}(2a_1 + (10-1)d) = 147 + \frac{4}{2}(2a_1 + (4-1)d)$$

$10a_1 + 45d = 147 + 4a_1 + 6d$

หาร 3 ตลอด $6a_1 + 39d = 147$

$2a_1 + 13d = 49 \quad ...(1)$

และจาก $u_k = \sum_{n=k}^{2k} a_n$ จะได้ $u_8 = \sum_{n=8}^{16} a_n = a_8 + a_9 + ... + a_{16}$

โจทย์ให้ $u_8 = 342$ ดังนั้น $a_8 + a_9 + ... + a_{16} = 342$

$$a_1 + a_2 + ... + a_7 + a_8 + a_9 + ... + a_{16} = 342 + a_1 + a_2 + ... + a_7$$

$$S_{16} = 342 + S_7$$

$$\frac{16}{2}\Big(2a_1 + (16-1)d\Big) = 342 + \frac{7}{2}\Big(2a_1 + (7-1)d\Big)$$

$$16a_1 + 120d = 342 + 7a_1 + 21d$$

หาร 9 ตลอด $9a_1 + 99d = 342$

$a_1 + 11d = 38 \quad ...(2)$

แก้ระบบสมการ (1) กับ (2): $2a_1 + 13d = 49 \quad ...(1)$

$a_1 + 11d = 38 \quad ...(2)$

$2 \times (2)$: $2a_1 + 22d = 76 \quad ...(3)$

$(3)-(1)$: $9d = 27$

$d = 3 \quad \longrightarrow$ แทนใน (2): $a_1 + 11(3) = 38$

$a_1 = 5$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{60} a_n = S_{60} = \frac{60}{2}\Big(2a_1 + (60-1)d\Big)$

$$= 30\Big(2(5) + (59)(3)\Big) = 30(187) = 5610$$

42. ค่าของ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^{x}+2^{2-x}-5}{2^{-\frac{x}{2}}-2^{1-x}}$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 12

วิธีทำ ถ้าแทน $x=2$ จะได้

$$\frac{2^{x}+2^{2-x}-5}{2^{-\frac{x}{2}}-2^{1-x}}=\frac{2^{2}+2^{2-2}-5}{2^{-\frac{2}{2}}-2^{1-2}}=\frac{4+1-5}{2^{-1}-2^{-1}}=\frac{0}{0}$$

หาค่าไม่ได้ $\longrightarrow$ ต้องจัดรูปให้ตัดกันก่อน

คูณ 2^{x} ทั้งเศษและส่วนให้เลขชี้กำลังเป็นบวก

$$\rightarrow\frac{2^{x}+2^{2-x}-5}{2^{-\frac{x}{2}}-2^{1-x}}\cdot\frac{2^{x}}{2^{x}}=\frac{2^{x+x}+2^{2-x+x}-5\left(2^{x}\right)}{2^{-\frac{x}{2}+x}-2^{1-x+x}}$$

$$=\frac{2^{2x}+2-5\left(2^{x}\right)}{2^{\frac{x}{2}}-2}=\frac{2^{2x}-5\left(2^{x}\right)+4}{2^{\frac{x}{2}}-2}$$

จัดรูปต่อ

ข้างบน แยกด้วยตัวประกอบ

$$\frac{2^{2x}-5\left(2^{x}\right)+4}{2^{\frac{x}{2}}-2}=\frac{\left(2^{x}-4\right)\left(2^{x}-1\right)}{2^{\frac{x}{2}}-2}\cdot\frac{2^{\frac{x}{2}}+2}{2^{\frac{x}{2}}+2}=\frac{\left(2^{x}-4\right)\left(2^{x}-1\right)\left(2^{\frac{x}{2}}+2\right)}{2^{x}-4}$$

ข้างล่าง คูณให้เข้าสูตร $(u-a)(u+a)=u^{2}-a^{2}$ $\qquad=\left(2^{x}-1\right)\left(2^{\frac{x}{2}}+2\right)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^{x}+2^{2-x}-5}{2^{-\frac{x}{2}}-2^{1-x}}=\lim\limits_{x\to 2}\left(2^{x}-1\right)\left(2^{\frac{x}{2}}+2\right)=\left(2^{2}-1\right)\left(2^{\frac{2}{2}}+2\right)=12$

43. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง โดยที่ $f'(x)=ax^2+bx$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และสอดคล้องกับ $f''(1)=3f'(1)$ และ $\int_1^2 f(x)dx=18$

ถ้าเส้นตรง $6x-y+4=0$ ขนานกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=f(x)$ ที่ $x=1$

แล้วค่าของ $f(2)$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 30

วิธีทำ

เส้นตรง $6x-y+4=0$ ขนาดเส้นโค้งที่ $x=1$ $\rightarrow$ ความชันเส้นตรง $=$ ความชันเส้นโค้งที่ $x=1$

$6x+4=y$

ความชัน $=6$

$$6 = f'(1)$$
$$6 = a(1^2)+b(1)$$
$$6 = a+b \quad ...(1)$$

จาก $f'(x)=ax^2+bx$

จะได้ $f''(x)=2ax+b$

โจทย์ให้ $f''(1) = 3f'(1)$

$$2a(1)+b = 3(6)$$
$$2a+b = 18 \quad ...(2)$$

จากความชันเส้นตรง จะได้ $f'(1) = 6$

จาก (1): $a+b = 6 \quad ...(1)$

(2)−(1): $a = 12$

แทนใน (1): $12+b=6$

$b=-6$

ดังนั้น $f'(x) = 12x^2-6x$

อินทิเกรต จะได้ $f(x) = \frac{12x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+c = 4x^3-3x^2+3 \quad ...(*)$

ดังนั้น $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 4x^3 - 3x^2 + c\, dx$

$= \frac{4x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + cx \Big|_1^2 = x^2 - x^3 + cx \Big|_1^2$

$= \left(2^4 - 2^3 + 2c\right) - \left(1^4 - 1^3 + c\right)$

$= 8 + c$

44. ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง โดยที่

$2f(x) - f\left(x^{-1}\right) = x + x^{-1}$ เมื่อ $x \neq 0$ ถ้า $\left|f\left(\frac{3}{4}\right)\right| = \frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b

เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 1 แล้วค่าของ $a + b$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 37

วิธีทำ จะแทน $x = \frac{3}{4}$ กับ $\frac{4}{3}$ เพื่อให้ x กับ x^{-1} กลับมาซ้ำที่เดิม

จาก $2f(x) - f\left(x^{-1}\right) = x + x^{-1}$ แทน $x = \frac{3}{4}$ จะได้ $2f\left(\frac{3}{4}\right) - f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12}$ ...(1)

แทน $x = \frac{4}{3}$ จะได้ $2f\left(\frac{4}{3}\right) - f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{25}{12}$ ...(2)

จะหา $\left|f\left(\frac{3}{4}\right)\right|$ ต้องกำจัด $f\left(\frac{4}{3}\right)$ $\rightarrow$ $2\times(1)$: $4f\left(\frac{3}{4}\right) - 2f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{50}{12}$ ...(3)

$(3)+(2)$: $3f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{75}{12}$

$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{25}{12}$

ดังนั้น $\left|f\left(\frac{3}{4}\right)\right| = \frac{25}{12} = \frac{a}{b}$ จะได้ $a + b = 25 + 12 = 37$

45. กำหนดให้ $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ ถ้า $\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^{2x+3y} \leq \left(\sqrt{2}+1\right)^{12}$ และ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^{3x-2y} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^{5}$ แล้ว $2x+5y$ มีค่ามากที่สุดเท่ากับเท่าใด

ตอบ 20

วิธีทำ

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^{2x+3y} \leq \left(\sqrt{2}+1\right)^{12}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right)^{2x+3y} \leq \left(\sqrt{2}+1\right)^{12}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}\right)^{2x+3y} \leq \left(\sqrt{2}+1\right)^{12}$$

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{2x+3y} \leq \left(\sqrt{2}+1\right)^{12}$$

ตัดฐาน $\sqrt{2}+1$ ทั้งสองฝั่ง

ไม่ต้องกลับเครื่องหมาย เนื่องจาก $\sqrt{2}+1 \rangle 1$

$$2x+3y \leq 12$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^{3x-2y} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^{5}$$

ตัดฐาน $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ ทั้งสองฝั่ง

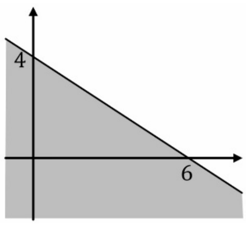
ต้องกลับเครื่องหมาย $\geq$ เป็น $\leq$ ด้วย

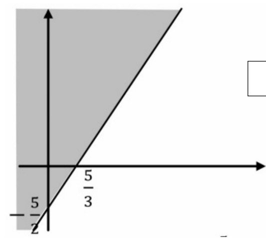
เนื่องจาก $\frac{1}{\sqrt{2}+1} \approx \frac{1}{1.4+1} = \frac{1}{2.4} \langle 1$

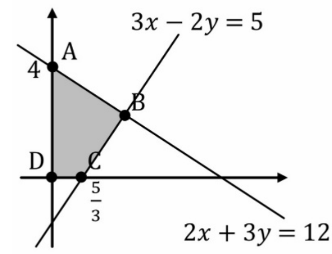
$$3x-2y \leq 5$$

โจทย์ถามค่ามากที่สุดของ $2x+5y$ $\longrightarrow$ ต้องใช้กำหนดการเชิงเส้น

$2x+3y\le 12$ $\quad$ $3x-2y\le 5$ $\quad$ $x\ge 0$ และ $y\ge 0$ $\longrightarrow$ เอาเฉพาะใน Q_1







$x=0\longrightarrow y=4$

$y=0\longrightarrow x=6$

$(0,0):2(0)+3(0)\le 12$ จริง

$\longrightarrow$ แรเงาฝั่งที่มี $(0,0)$ (ซ้ายล่าง)

$x=0\longrightarrow y=-\dfrac{5}{2}$

$y=0\longrightarrow x=\dfrac{5}{3}$

$(0,0):3(0)-2(0)\le 5$ จริง

$\longrightarrow$ แรเงาฝั่งที่มี $(0,0)$ (ซ้านบน)

หา B : $2x+3y = 12$ ...(1)

$3x-2y = 5$ ...(2)

$2\times(1):\quad 4x+6y = 24$ ...(3)

$3\times(2):\quad 9x-6y = 15$ ...(4)

$(3)+(4):\quad 13x = 39$

$x = 3$

$(1):\quad 2(3)+3y = 12$

$3y = 6$

$y = 2$

จะได้ $B(3,2)$

แทนจุดมุมทุกมุมใน

$P=2x+5y$

$A(0,4)$	$P = 2(0)+5(4) = 20$
$B(3,2)$	$P = 2(3)+5(2) = 16$
$C\left(\dfrac{5}{3},0\right)$	$P = 2\left(\dfrac{5}{2}\right)+5(0) = \dfrac{10}{3}$
$D(0,0)$	$P = 2(0)+5(0)=0$

$\longrightarrow$ P มากสุด $=20$