เฉลย

1.	2	11.	3	21.	1	31.	230	41.	4
2.	5	12.	3	22.	4	32.	126	42.	1.5
3.	3	13.	1	23.	5	33.	5	43.	2
4.	2	14.	1	24.	4	34.	9.25	44.	78.7
5.	5	15.	2	25.	5	35.	32	45.	429
6.	4	16.	4	26.	4	36.	68		
7.	4	17.	3	27.	3	37.	-		
8.	2	18.	4	28.	1	38.	160		
9.	3	19.	2	29.	2	39.	3		
10.	5	20.	3	30.	1	40.	117		

<u>แนวคิด</u>

1. **ตอบ : 2**

วิธีทำ จาก $(p\vee r)\leftrightarrow(\sim p\wedge\sim q)$ เป็นจริง จะสรุปได้ว่า $p\vee r$ กับ $\sim p\wedge\sim q$ ต้องมีค่าความจริงเหมือนกัน จะเห็นว่า p เป็น T *<u>ไม่ได้</u>*

เพราะถ้า p เป็นจริง จะทำให้ $p\vee r\equiv T\vee r\equiv T$
*<u>แต่</u>*จะทำให้ $\sim p\wedge\sim q\equiv\sim T\wedge\sim q\equiv F\wedge\sim q\equiv F$
ไม่เหมือนกัน

ดังนั้น p ต้องเป็น F และจะได้ $p\vee r\equiv F\vee r\equiv r$
และ $\sim p\wedge\sim q\equiv\sim F\wedge\sim q\equiv T\wedge\sim q\equiv\sim q$
ต้องเหมือนกัน $\rightarrow$ จะได้ $r\equiv\sim q$ นั่นคือ r กับ q ต้องมีค่าความจริง ตรงข้ามกัน

<u>สรุป</u> จากข้อมูลที่โจทย์ให้ จะได้ว่า $p\equiv F$ และ r กับ q ตรงข้ามกัน

1. $(q\leftrightarrow r)\vee p$
$\equiv\ F\ \vee F$
$\equiv\ F$

r กับ q ตรงข้ามกัน จะได้ $q\leftrightarrow r\equiv F$

2. $(p\rightarrow q)\vee(r\rightarrow p)$
$\equiv(F\rightarrow q)\vee(r\rightarrow F)$
$\equiv\ T\ \vee(r\rightarrow F)$
$\equiv\ T$

3. $(r \to q) \wedge (p \wedge q)$
$\equiv (r \to q) \wedge (F \wedge q)$
$\equiv (r \to q) \wedge \quad F$
$\equiv \quad F$

4. $(q \to \sim p) \vee (q \wedge r)$
$\equiv (q \to \sim F) \vee (q \wedge r)$
$\equiv (q \to \quad T) \vee (q \wedge r)$
$\equiv \quad T \quad \vee (q \wedge r)$
$\equiv \quad T$

5. $(r \vee q) \leftrightarrow (p \to \sim r)$
$\equiv (r \vee q) \leftrightarrow (F \to \sim r)$
$\equiv \quad T \quad \leftrightarrow \quad T$
$\equiv \quad T$

r กับ q ตรงข้ามกัน ดังนั้น จะมีตัวหนึ่ง T ตัวหนึ่ง F
เมื่อมีตัวหนึ่ง T จะได้ $r \vee q \equiv T$ เสมอ

จะเห็นว่า มีข้อ 2. ข้อเดียว ที่ตรงกับข้อความในตัวเลือก

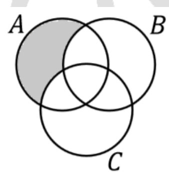
2. ตอบ : 5

วิธีทำ จาก $A \cap (B \cup C)' = \varnothing$

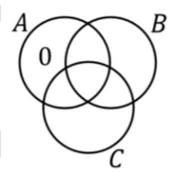
$A - (B \cup C) = \varnothing$

ใช้สูตร $A - B = A \cap B'$

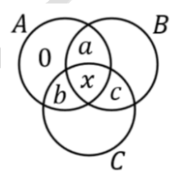
ซึ่ง $A - (B \cup C)$ คือบริเวณ



เป็นเซตว่าง ดังนั้น ใส่ 0 ได้ดังรูป



จาก $n(A \cap B) = n(B \cap C) = n(A \cap C) \to$ กำหนด a,b,c,x ดังรูป

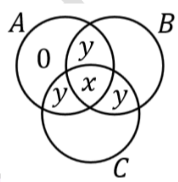


จะได้ $n(A \cap B) = n(B \cap C) = n(A \cap C)$

$a + x \; = \; c + x \; = b + x$

$a \; = \; c \; = b$

ให้ $a = b = c = y$ จะได้



จาก $n(A) = 12$ จะได้ $0 + y + x + y = 12$

$x + 2y \qquad = 12 \quad \ldots(1)$

และจากสูตร Inclusive – Exclusive จะได้

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

$20 \; = \; 12 + 15 + 16 - (x + y) - (x + y) - (x + y) + x$

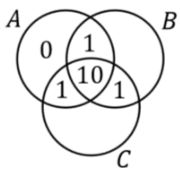
$20 \; = \; 43 \quad -x - y \quad -x - y \quad -x - y \quad + x$

$2x + 3y \; = \; 23 \quad \ldots(2)$

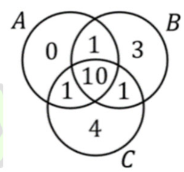
แก้ระบบสมการ (1) กับ (2):

$$
\begin{aligned}
x+2y &= 12 \quad \ldots(1)\\
2x+3y &= 23 \quad \ldots(2)\\
2\times(1):\quad 2x+4y &= 24 \quad \ldots(3)\\
(3)-(2):\quad y &= 1 \quad \rightarrow \text{ แทนใน } (1): x+2(1)=12\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x \;\; =10
\end{aligned}
$$

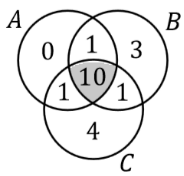
แทน $x=10,\ y=1$ ในแผนภาพ และหาส่วนที่เหลือ จะได้ดังรูป



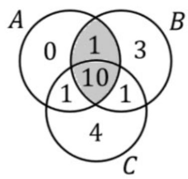
$\xrightarrow{n(B)=15,\ n(C)=16}$



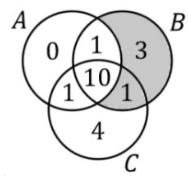
1. $A\cap B\cap C \rightarrow 10$



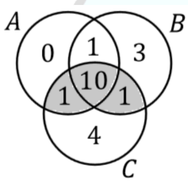
2. $A\cap B \rightarrow 11$



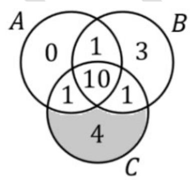
3. $A'\cap B = B\cap A'$
$= B - A \rightarrow 11$



4. $(A\cup B)\cap C \rightarrow 12$



5. $(A\cup B)'\cap C = C\cap(A\cup B)'$
$= C-(A\cup B) \rightarrow 4$



จะเห็นว่า ข้อ 5. เท่านั้น ที่ไม่ตรงกับข้อความในตัวเลือก

3. **ตอบ : 3**

วิธีทำ ***หา A*** : $\big||x-1|-1\big|<1$

จากสมบัติค่าสัมบูรณ์ จะได้ $-1<|x-1|-1<1$

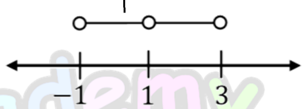
$0<|x-1|<2$

จะได้ $0<|x-1|$ และ $|x-1|<2$

จริงเสมอ *ยกเว้น* เมื่อ $x-1=0$
$\rightarrow x$ เป็นอะไรก็ได้ ที่ไม่ใช่ 1

$-2<x-1<2$
$-1<x<3$

รวมสองฝั่งจะได้ A ดังรูป



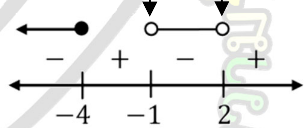
หมายเหตุ: จริงๆแล้ว ข้อนี้ ไม่ต้องหา B ก็ได้ เนื่องจาก A ที่ได้ เป็นสับเซตของ $(-1,3)$ ในข้อ 3 เพียงข้อเดียว เนื่องจาก $A\cap B\subset A$ และ $A\subset(-1,3)$ ดังนั้น จะสรุปได้ว่า $A\cap B\subset(-1,3)$ ดังนั้น ข้อ 3 เป็นคำตอบได้แน่นอน (แต่ถ้าไม่หา B จะไม่รู้ว่ามีตัวเลือกข้ออื่นเป็นคำตอบได้อีกหรือไม่)

หา B :

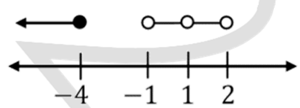
$$\frac{1}{x+1}\ge\frac{2x-2}{x^2-3x+2}$$
$$\frac{1}{x+1}\ge\frac{2(x-1)}{(x-2)(x-1)}$$
$$\frac{1}{x+1}\ge\frac{2\cancel{(x-1)}}{(x-2)\cancel{(x-1)}}$$
$$\frac{1}{x+1}\ge\frac{2}{x-2}\ ;\ x\ne1$$

$$0\ge\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x+1}$$
$$0\ge\frac{2(x+1)-1(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$
$$0\ge\frac{2x+2-x+2}{(x-2)(x+1)}$$
$$0\ge\frac{x+4}{(x-2)(x+1)}$$

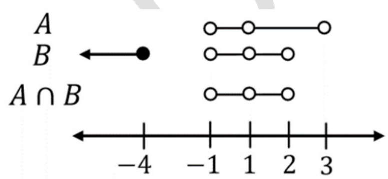
มาจากตัวส่วน ต้องเป็นวงขาวๆ



แต่ $x\ne1$ ดังนั้น จะเหลือ B ดังรูป



จะได้ $A\cap B$ ดังรูป



จะเห็นว่า $A\cap B$ เป็นสับเซตของ $(-1,3)$ ในข้อ 3 เพียงข้อเดียว

4. ตอบ : 2

วิธีทำ สังเกตว่าแต่ละวงเล็บ จะเข้าสูตร $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ ได้ ถ้ามี $\sin\theta$ คูณเพิ่มอีกตัว

$\rightarrow$ คูณ $\frac{\sin\theta}{\sin\theta}$ เข้าไปที่แต่ละวงเล็บ แล้วเข้าสูตร $\sin 3\theta$ ดังนี้

$$= \frac{(\sin 9^\circ)(3-4\sin^2 9^\circ)}{\sin 9^\circ}\cdot\frac{(\sin 27^\circ)(3-4\sin^2 27^\circ)}{\sin 27^\circ}\cdot\frac{(\sin 81^\circ)(3-4\sin^2 81^\circ)}{\sin 81^\circ}\cdot\frac{(\sin 243^\circ)(3-4\sin^2 243^\circ)}{\sin 243^\circ}$$

$$= \frac{3\sin 9^\circ - 4\sin^3 9^\circ}{\sin 9^\circ}\cdot\frac{3\sin 27^\circ - 4\sin^3 27^\circ}{\sin 27^\circ}\cdot\frac{3\sin 81^\circ - 4\sin^3 81^\circ}{\sin 81^\circ}\cdot\frac{3\sin 243^\circ - 4\sin^3 243^\circ}{\sin 243^\circ}$$

$$= \frac{3\sin(9^\circ)}{\sin 9^\circ}\cdot\frac{3\sin(27^\circ)}{\sin 27^\circ}\cdot\frac{3\sin(81^\circ)}{\sin 81^\circ}\cdot\frac{3\sin(243^\circ)}{\sin 243^\circ}$$

$$= \frac{3\sin 27^\circ}{\sin 9^\circ}\cdot\frac{3\sin 81^\circ}{\sin 27^\circ}\cdot\frac{3\sin 243^\circ}{\sin 81^\circ}\cdot\frac{3\sin 729^\circ}{\sin 243^\circ}$$

$\rightarrow$ เหลือ $\frac{\sin 729^\circ}{\sin 9^\circ}$

เนื่องจาก 729 หารด้วย 360 เหลือเศษ 9 ดังนั้น $\frac{\sin 729^\circ}{\sin 9^\circ} = \frac{\sin 9^\circ}{\sin 9^\circ} = 1$

5. ตอบ : 5

วิธีทำ จากสูตร $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ ได้ จะได้ $\cot\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

จะได้
$$\begin{aligned}
2\cot\frac{\theta}{2} &= (1+\cot\theta)^2 \\
\frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta} &= \left(1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 \\
\frac{2+2\cos\theta}{\sin\theta} &= \left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 \\
\frac{2+2\cos\theta}{\sin\theta} &= \frac{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \qquad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \\
\frac{2+2\cos\theta}{\sin\theta} &= \frac{1+2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta} \\
2+2\cos\theta &= \frac{1+2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} \\
2\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta &= 1+2\sin\theta\cos\theta \\
2\sin\theta &= 1 \\
\sin\theta &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

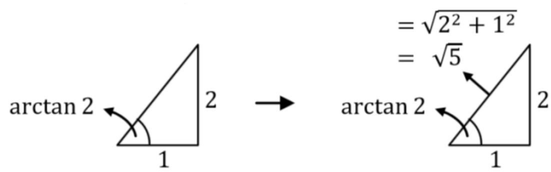
$\theta \qquad = 30^\circ$

ดังนั้น $\dfrac{(1+\sin\theta)\sec^2\theta}{\cos 2\theta} = \dfrac{(1+\sin 30^\circ)\sec^2 30^\circ}{\cos 60^\circ} = \dfrac{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{1}\right) = 4$

6. **ตอบ : 4**

วิธีทำ หลัง arc ทุกตัวเป็นค่าบวก → ผล arc จะได้มุมใน Q1 → ใช้สามเหลี่ยมมาช่วยคิดได้ โดยไม่ต้องระวังเรื่องเครื่องหมายบวกลบ

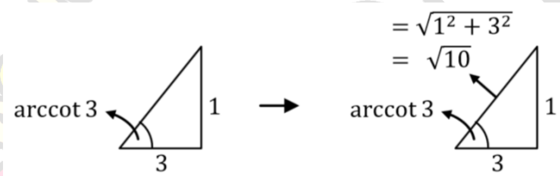
หา $\sec^2(\text{arctan}2)$:



จะได้ $\sec(\text{arctan}2) = \dfrac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$

ดังนั้น $\sec^2(\text{arctan}2) = 5$

หา $\text{cosec}^2(\text{arccot}3)$:

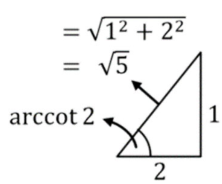


จะได้ $\text{cosec}(\text{arccot}3) = \dfrac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}$

ดังนั้น $\text{cosec}^2(\text{arccot}3) = 10$

สุดท้าย $\text{cosec}\left(2\text{arccot}2+\text{arccos}\frac{3}{5}\right) = \dfrac{1}{\sin\left(2\text{arccot}2+\text{arccos}\frac{3}{5}\right)}$

$$= \frac{1}{\sin(2\text{arccot}2)\cos\left(\text{arccos}\frac{3}{5}\right)+\cos(2\text{arccot}2)\sin\left(\text{arccos}\frac{3}{5}\right)} \quad \ldots(*)$$



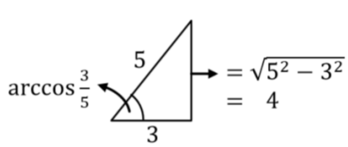
$\sin(2\text{arccot}2) = 2\sin(\text{arccot}2)\cos(\text{arccot}2)$

$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{5}$

$\cos(2\text{arccot}2) = 2\cos^2(\text{arccot}2) - 1$

$= 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}$

$\boxed{\begin{aligned}\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta \\ \cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1\end{aligned}}$



$\cos\left(\text{arccos}\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$

$\sin\left(\text{arccos}\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$

แทนใน $(*)$ จะได้ $\operatorname{cosec}\left(2\operatorname{arccot}2+\arccos\frac{3}{5}\right)=\dfrac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)}=\dfrac{1}{\frac{24}{25}}=\dfrac{25}{24}$

จะได้คำตอบที่โจทย์ถาม $=5+10+\frac{25}{24}=\frac{360+25}{24}=\dfrac{385}{24}$

7. ตอบ : 4

วิธีทำ จะได้ $A=\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)=\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=30^\circ$

ดังนั้น $\sin^2 B+\sin^2(A+B)+\sin^2(5A+B)$

$$=\sin^2 B+\sin^2\left(30^\circ+B\right)+\sin^2\left(5\left(30^\circ\right)+B\right)$$

$$=\sin^2 B+\left(\sin 30^\circ\cos B+\cos 30^\circ\sin B\right)^2+\left(\sin 150^\circ\cos B+\cos 150^\circ\sin B\right)^2$$

$$=\sin^2 B+\left(\sin 30^\circ\cos B+\cos 30^\circ\sin B\right)^2+\left(\sin 30^\circ\cos B-\cos 30^\circ\sin B\right)^2$$

$$=\sin^2 B+\left(\frac{1}{2}\cos B+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cos B-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right)^2$$

$$=\sin^2 B+\frac{\cos^2 B}{4}+\cancel{\frac{\sqrt{3}\cos B\sin B}{2}}+\frac{3\sin^2 B}{4}+\frac{\cos^2 B}{4}-\cancel{\frac{\sqrt{3}\cos B\sin B}{2}}+\frac{3\sin^2 B}{4}$$

$$=\sin^2 B+\frac{2\cos^2 B}{4}+\frac{6\sin^2 B}{4}$$

$$=\sin^2 B+\frac{1-2\sin^2 B}{2}+\frac{3\sin^2 B}{2}$$

$$=\frac{2\sin^2 B+1-\sin^2 B+3\sin^2 B}{2}$$

$$=\frac{4\sin^2 B+1}{2}$$

ในตัวเลือก เป็นมุมสองเท่า $\rightarrow$ จะใช้สูตร $\cos 2B=1-2\sin^2 B$
มาช่วยจัดรูป

$$2\sin^2 B=1-\cos 2B$$
$$\sin^2 B=\frac{1-\cos 2B}{2}$$

$$=\frac{4\left(\frac{1-\cos 2B}{2}\right)+1}{2}$$

$$=\frac{2-2\cos 2B+1}{2}=\frac{3}{2}-\cos 2B$$

8. ตอบ : 2

วิธีทำ

$$\log_a(b-2)=\log_{\sqrt{a}}\sqrt{3}+\log_{a^2}(b+2)$$

$\log_{a^n} M=\frac{1}{n}\log_a M$

$$\log_a(b-2)=\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_a\sqrt{3}+\frac{1}{2}\log_a(b+2)$$

$$\log_a(b-2)=2\log_a\sqrt{3}+\frac{1}{2}\log_a(b+2)$$

$n\log_a M=\log_a M^n$

$$\log_a(b-2)=\log_a\sqrt{3}^2+\log_a(b+2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\log_a(b-2)=\log_a 3+\log_a\sqrt{b+2}$$

$\log_a M+\log_a N=\log_a MN$

$$\log_a(b-2)=\log_a(3)\left(\sqrt{b+2}\right)$$

$$b-2=(3)\left(\sqrt{b+2}\right)$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$(น-ล)^2=น^2-2นล+ล^2$

$$b^2-4b+4=(9)(b+2)$$

$$b^2-13b-14=0$$

$$(b-14)(b+1)=0$$

$$b=14,\ \cancel{-1}$$

โจทย์ให้ b เป็นจำนวนจริงบวก

แก้อีกสมการ

$$\left(\log_b^2 a\right)\left(\log_a b\right)=1+\log_{\sqrt{a}} b$$

$\log_{a^n} M=\frac{1}{n}\log_a M$

$$\left(\log_b a\right)^2\left(\log_a b\right)=1+\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_a b$$

$\log_N M=\frac{1}{\log_M N}$

$$\left(\log_b a\right)^2\left(\frac{1}{\log_b a}\right)=1+2\left(\frac{1}{\log_b a}\right)$$

เปลี่ยนตัวแปร ให้ $\log_b a=x$

$$(x)^2\left(\frac{1}{x}\right)=1+2\left(\frac{1}{x}\right)$$

คูณ x ตลอด

$$x^2=x+2$$

$$x^2-x-2=0$$

$$(x-2)(x+1)=0$$

$$x=2,\ -1$$

เปลี่ยนตัวแปรกลับ แทน $b=14$

$$\log_b a=2,\ -1$$

$$\log_{14} a=2,\ -1$$

$$a=14^2,\ 14^{-1}$$

$$a=196,\ \cancel{\frac{1}{14}}$$

โจทย์ให้ $a>2$

จะได้ $a+b=196+14=210$

9. **ตอบ : 3**

วิธีทำ ถ้า y ถูกยกกำลังคู่ หรือ อยู่ในค่าสัมบูรณ์ แล้ว *มักจะ* ไม่ใช่ฟังก์ชัน
(เพราะ y เป็นลบกับบวก จะยกกำลังคู่ได้ค่าเดียวกัน ทำให้อาจมี y สองค่า สำหรับ x ค่าหนึ่งๆ)

ข้อ 3. จะเห็นว่าข้อ 3. มี y^2 อยู่ จึงน่าสงสัยว่าจะไม่ใช่ฟังก์ชัน

ลองให้ $y=1$ กับ -1 จะได้ $x^2=\sqrt{(\pm1)^2+1}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$x \qquad =\pm\sqrt{\sqrt{2}}$ → หาค่า x ได้

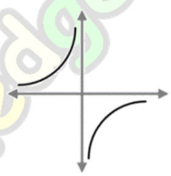
ดังนั้น จะมี x หนึ่งค่าที่จับคู่กับ y สองค่า เช่น $\left(\sqrt{\sqrt{2}},1\right)$ กับ $\left(\sqrt{\sqrt{2}},-1\right)$ → ข้อ 3. ***ไม่เป็นฟังก์ชัน***

ข้อ 2. tan เป็น “ฟังก์ชัน” ตรีโกณมิติ → จึงเป็นฟังก์ชันโดยอัตโนมัติ

ข้อ 1. กับ ข้อ 4. วาดกราฟ

$$xy+1=0$$
$$xy=-1$$

$$y=|2-x|$$
$$y=|x-2| \quad \rightarrow \text{ เป็นตัววีหักที่ } (2,0)$$



จะเห็นว่าเส้นแนวดิ่งตัดกราฟได้อย่างมาก 1 จุดเสมอ → ***เป็นฟังก์ชัน***

ข้อ 5. พิสูจน์ได้โดยสมมติให้ (x_1,y_1) และ (x_2,y_2) สอดคล้องกับความสัมพันธ์ $x^2=\frac{y}{y+1}$

จะได้ $x_1^2=\frac{y_1}{y_1+1}$ และ $x_2^2=\frac{y_2}{y_2+1}$

ถ้า $x_1 = x_2$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$x_1^2 = x_2^2$$
$$\frac{y_1}{y_1+1} = \frac{y_2}{y_2+1}$$
$$y_1y_2+y_1 = y_1y_2+y_2$$
$$y_1 = y_2$$

จะเห็นว่า ถ้า $x_1=x_2$ แล้ว จะได้ $y_1=y_2$ สอดคล้องกับเงื่อนไขของฟังก์ชัน → ***เป็นฟังก์ชัน***

10. ตอบ : 5

วิธีทำ จัดรูปวงกลม

$$x^2+y^2+ax-6y-12=0$$

เติม a^2 เพื่อเข้าสูตรกำลังสองสมบูรณ์ $u^2+2ua+a^2=(u+a)^2$

$$\left(x^2+ax\right)+\left(y^2-6y\right)=12$$

$$\left(x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)+\left(y^2-6xy+3^2\right)=12+\left(\frac{a}{2}\right)^2+3^2$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-3\right)^2=21+\frac{a^2}{4}$$

จะได้วงกลมมีจุดศูนย์กลางคือ $\left(-\frac{a}{2},3\right)\ldots(*)$

> ระยะจาก (a,b) ไปยังเส้นตรง $Ax+By+C=0$
> หาได้จากสูตร $\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

จะได้ระยะจาก $\left(-\frac{a}{2},3\right)$ ไปยังเส้นตรง $4x+3y=71$ เท่ากับ $\frac{\left|4\left(-\frac{a}{2}\right)+3(3)-71\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|-2a-62|}{5}$

$$4x+3y-71=0$$

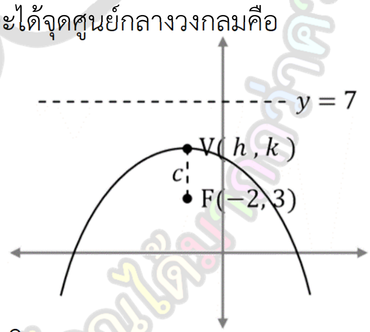
แต่โจทย์ให้ระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังเส้นตรง $=14$ ดังนั้น

$$\frac{|-2a-62|}{5}=14$$
$$|-2a-62|=70$$
$$-2a-62=70,-70$$
$$-2a=132,-8$$
$$a=-66,\ 4$$

แต่โจทย์ให้ $a>0$ ดังนั้น จะได้ $a=4$ แทนใน $(*)$ จะได้จุดศูนย์กลางวงกลมคือ $\left(-\frac{4}{3},0\right)=(-2,3)$ ดังนั้น พาราโบลา มี $F(-2,3)$ และมีเส้นไดเรคตริกซ์ คือ $y=7$ จะวาดได้ดังรูป

จุดยอด V จะอยู่ตรงกลาง ระหว่าง F และเส้นไดเรคตริกซ์

ดังนั้น จะได้พิกัดของจุดยอดคือ $V\left(-2,\frac{3+7}{2}\right)=V(-2,5)\rightarrow$



จะได้ $h=-2$ และ $k=5$ และจะได้ระยะโฟกัส $c=5-3=2$

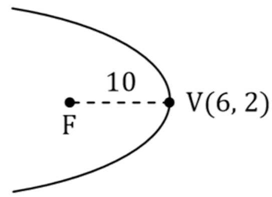
แทนในรูปสมการของพาราโบลาคว่ำ

$$(x-h)^2=-4c(y-k)$$
$$(x-(-2))^2=-4(2)(y-5)$$
$$(x+2)^2=-8(y-5)$$
$$x^2+4x+4=-8y+40$$
$$x^2+4x+8y-36=0$$

11. ตอบ : 3

วิธีทำ จัดรูปพาราโบลา ได้

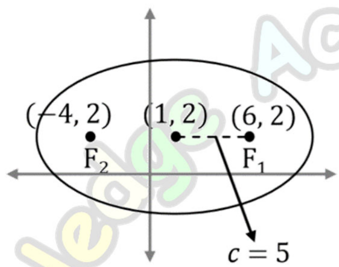
$$\begin{aligned} y^2-4y &= -40x+236 \\ y^2-4y+4 &= -40x+236+4 \\ (y-2)^2 &= -40x+240 \\ (y-2)^2 &= -40x(x-6) \\ (y-2)^2 &= -4(10)(x-6) \end{aligned}$$



เทียบกับ รูปสมการ $(y-k)^2=-4c(x-h)$

จะได้พาราโบลาเปิดซ้าย มีจุดยอด $V(h,k)=(6,2)$

จุดโฟกัสจะอยู่ห่างจากจุดยอดไปทางซ้าย $=c=10 \rightarrow$ จะได้พิกัดจุดโฟกัสคือ $F(6-10,2)=F(-4,2)$



ดังนั้น วงรีมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $F_1(6,2)$ และ $F_2(-4,2)$

จะเห็นว่า โฟกัสเรียงตัวในแนวนอน $\rightarrow$ เป็นวงรีแนวนอน

เนื่องจากจุดศูนย์กลางวงรี จะอยู่ตรงกลางระหว่างจุดโฟกัสทั้งสอง จะได้ จุดศูนย์กลางวงรี $(h,k)=\left(\frac{6+(-4)}{2},2\right)=(1,2)$

และจะได้ ระยะโฟกัส $c=6-1=5$ ดังรูป

จากสมบัติของวงรี ถ้า A เป็นจุดบนวงรี จะได้ $AF_1+AF_2=$ ความยาวแกนเอก

เนื่องจากวงรี ผ่านจุด $A(4,6)$ ใช้สูตรระยะระหว่างจุด ระหว่าง A กับ $F_1(6,2)$ และ $F_2(-4,2)$

จะได้

$$\begin{aligned} AF_1+AF_2 &= \sqrt{(4-6)^2+(6-2)^2}+\sqrt{(4-(-4))^2+(6-2)^2} \\ &= \sqrt{4+16}+\sqrt{64+16} \\ &= \sqrt{20}+\sqrt{80} \\ &= 2\sqrt{5}+4\sqrt{5} = 6\sqrt{5} \end{aligned}$$

ดังนั้น ความยาวแกนเอก $=6\sqrt{5} \rightarrow$ จะได้ $a=\frac{6\sqrt{5}}{2}=3\sqrt{5} \rightarrow$ และจะหา b

ได้จาก

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2 \\ \left(3\sqrt{5}\right)^2 &= b^2+5^2 \\ 45 &= b^2+25 \\ 20 &= b^2 \end{aligned}$$

แทนในสมการวงรีแนวนอน $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

$$\frac{(x-1)^2}{\left(3\sqrt{5}\right)}+\frac{(y-2)^2}{20}=1$$

$$\frac{x^2-2x+1}{45}+\frac{y^2-4y+4}{20}=1$$

$$\frac{4\left(x^2-2x+1\right)+9\left(y^2-4y+4\right)}{180}=1$$

$$4x^2-8x+4+9y^2-36y+36=180$$

$$4x^2+9y^2-8x-36y-140=0$$

12. ตอบ : 3

วิธีทำ ข้อนี้ จะพิจารณาเป็นข้อๆ และแก้สมการเท่าที่จำเป็น

1. $\exists x[P(x)\wedge Q(x)]$ จะจริงเมื่อ มี x ค่าหนึ่ง ที่ทำให้ทั้ง $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นจริง แก้ $P(x)$ ก่อน $\rightarrow$ จะใช้ทฤษฎีตัวประกอบตรรกยะและทฤษฎีเศษ หาตัวประกอบของ $8x^3-4x-1$ ก็ได้ อีกวิธีคือ เติม $+1$ ให้ $8x^3$ เพื่อเข้าสูตรผลบวกกำลังสาม แล้วจับกลุ่มดึงตัวร่วม ดังนี้

$$\begin{aligned}
&8x^3-4x-1 &&=0\\
\text{เติม } +1-1:\quad &8x^3+1-1-4x-1 &&=0\\
&\left(8x^3+1\right)-4x-2 &&=0\\
u^3+a^3=(u+a)\left(u^2-ua+a^2\right):\quad &\left((2x)^3+1^3\right)-2(2x+1) &&=0\\
&(2x+1)\left(4x^2-2x+1\right)-2(2x+1) &&=0\\
\text{ดึง } 2x+1 \text{ เป็นตัวร่วม}:\quad &(2x+1)\left(4x^2-2x+1-2\right) &&=0\\
&(2x+1)\left(4x^2-2x-1\right) &&=0
\end{aligned}$$

$$x=-\frac{1}{2} \qquad x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(4)(-1)}}{2(4)} \leftarrow \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{20}}{8} \qquad =\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$$

แต่ $\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$ เป็นอตรรกยะ ไม่อยู่ในเอกภพสัมพัทธ์ ดังนั้น มี $x=-\frac{1}{2}$ เพียงค่าเดียว ที่ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

ถ้าลองแทน $x=-\frac{1}{2}$ ใน $Q(x)$ ดู จะได้ $8\left(-\frac{1}{2}\right)^4-8\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)+1=\frac{1}{2}-2-\frac{1}{2}+1$

$=-1\neq 0 \rightarrow$ ***เป็นเท็จ***

ดังนั้น จะไม่มี x ตัวไหนเลย ที่ทำให้ทั้ง $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นจริง $\rightarrow$ ***ข้อ 1. เป็นเท็จ***

2. $\forall x[Q(x)\rightarrow R(x)]$ จะเป็นจริงเมื่อ x ทุกตัวที่ทำให้ $Q(x)$ เป็นจริง จะทำให้ $R(x)$ เป็นจริงด้วย แก้หา $Q(x)\rightarrow$ จับกลุ่มดึงตัวร่วม แล้วเติม $-1+1$ คล้ายๆแบบเดิมได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}
&8x^4-8x^2+x+1 &&=0\\
&8x^2\left(x^2-1\right)+(x+1) &&=0\\
u^2-a^2=(u-a)(u+a):\quad &8x^2(x-1)(x+1)+(x+1) &&=0\\
\text{ดึง } x+1 \text{ เป็นตัวร่วม}:\quad &(x+1)\left(8x^2(x-1)+1\right) &&=0
\end{aligned}$$

เติม $-1+1$

$$(x+1)\left(8x^3-8x^2+1\right)=0$$
$$(x+1)\left(8x^3-1+1-8x^2+1\right)=0$$
$$(x+1)\left(8x^3-1-8x^2+2\right)=0$$

$น^3-ล^3=(น-ล)(น^2+นล+ล^2)$
$น^2-ล^2=(น-ล)(น+ล)$

$$(x+1)\left(\left(8x^3-1\right)-2\left(4x^2-1\right)\right)=0$$
$$(x+1)\left((2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)-2(2x-1)(2x+1)\right)=0$$

ดึง $2x-1$ เป็นตัวร่วม

$$(x+1)(2x-1)\left(\left(4x^2+2x+1\right)-2(2x+1)\right)=0$$
$$(x+1)(2x-1)\left(4x^2+2x+1-4x-2\right)=0$$
$$(x+1)(2x-1)\left(4x^2-2x-1\right)=0$$

$x=-1$ $\quad$ $x=\frac{1}{2}$ $\quad$ เหมือนตัวประกอบของ $P(x)$ → ไม่มีคำตอบที่เป็นตรรกยะ

ดังนั้น มี $x=-1,\frac{1}{2}$ สองค่าที่ทำให้ $Q(x)$ เป็นจริง → ลองแทนว่าจะทำให้ $R(x)$ เป็นจริงทั้งสองตัวหรือไม่

$x=-1:(-1)^3+(-1)^2=-1+1=0\rightarrow$ ไม่มากกว่า 0 → ทำให้ $R(x)$ เป็นเท็จ

จะเห็นว่า $x=-1$ ทำให้ $Q(x)$ เป็นจริง แต่ทำให้ $R(x)$ เป็นเท็จ → ไม่ต้องแทนต่อ → สรุปได้เลยว่า ***ข้อ 2. ผิด***

3. $\forall x\left[Px\rightarrow R(x)\right]$ จะเป็นจริงเมื่อ x ทุกตัวที่ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง จะทำให้ $R(x)$ เป็นจริงด้วย จากข้อ 1. จะได้ $x=-\frac{1}{2}$ เป็นค่าเดียวที่ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง → ลองแทนว่าจะทำให้ $R(x)$ เป็นจริงหรือไม่

$x=-\frac{1}{2}:\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{-1+2}{8}>0\rightarrow R(x)$ เป็นจริง → ***ข้อ 3. ถูก***

13. ตอบ : 1

วิธีทำ จัดให้อยู่ในรูปเศษส่วน จะได้ $\frac{1}{\sqrt{1-x}}\left(1-\frac{2x^3}{x^2+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\left(\frac{x^2+1-2x^3}{x^2+1}\right)=\frac{-2x^3+x^2+1}{\sqrt{1-x}\left(x^2+1\right)}$

ซึ่งถ้าแทน $x=1$ จะได้ $\frac{0}{0}$ ดังนั้น ทั้งเศษและส่วน ต้องมี $x-1$ เป็นตัวประกอบ

เอา

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ & & -2 & -1 & -1 \\ \hline & -2 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

เศษ มาหารสังเคราะห์ ด้วย $x-1$ จะได้ผลหาร $-2x^2-x-1$ ดังรูป

ดังนั้น $\frac{-2x^3+x^2+1}{\sqrt{1-x}\left(x^2+1\right)}=\frac{(x-1)\left(-2x^2-x-1\right)}{\sqrt{1-x}\left(x^2+1\right)}=\frac{-(1-x)\left(-2x^2-x-1\right)}{\sqrt{1-x}\left(x^2+1\right)}$

$$=\frac{-\left(\sqrt{1-x}\right)^2\left(-2x^2-x-1\right)}{\sqrt{1-x}\left(x^2+1\right)}$$

ตัด $\sqrt{1-x}$ ทั้งเศษและส่วน

$$=\frac{-\sqrt{1-x}\left(-2x^2-x-1\right)}{\left(x^2+1\right)}$$

แทน $x=1$ ใหม่ จะได้ $\frac{-\sqrt{1-1}\left(-2\left(1^2\right)-1-1\right)}{\left(1^2+1\right)}=\frac{-(0)\left(-2\left(1^2\right)-1-1\right)}{2}=0$

14. ตอบ : 1

วิธีทำ หาความชันของเส้นโค้ง $y=2+x|x-1|$ ณ จุด $(0,2)$ ก่อน

บริเวณจุด $(0,2)$ มีค่า x ประมาณ 0 ซึ่งจะทำให้ $x-1$ เป็นลบ ดังนั้น $|x-1|=-(x-1)$

$$|A|=\begin{cases} A & \text{เมื่อ } A\ge 0 \\ -A & \text{เมื่อ } A<0 \end{cases}$$

จะได้ที่บริเวณ $(0,2)$ สมการเส้นโค้งคือ $y=2+x\left(-(x-1)\right)$

$$=2-x^2+x$$

ดิฟ y จะได้ความชัน บริเวณ $(0,2)$ คือ $y'=0-2x+1$

ดังนั้น ความชัน ณ จุด $(0,2)\rightarrow$ แทน $x=0$ จะได้ $y'=0-2(0)+1=1$ ดังนั้น เส้นตรง L มีความชัน $=1$

เนื่องจาก เส้นตรง N ตั้งฉากกับเส้นตรง L $\rightarrow$ ความชัน N กับ L ต้องคูณกันได้ -1

$\rightarrow$ จะได้ เส้นตรง N มีความชัน $=-1$

(เพราะ $-1\times 1=1-1$)

เนื่องจากเส้นตรง N ผ่านจุด $(0,2)$ ด้วย $\rightarrow$ ใช้สูตร $\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$ จะได้สมการเส้นตรง N

คือ
$$\frac{y-2}{x-0}=-1$$
$$y-2=-x$$
$$x+y=2$$

ดังนั้น จุดที่จะอยู่บนเส้นตรง N ได้ ต้องแทนในสมการ $x+y=2$ แล้วเป็นจริง

1. $-1+3=2$ จริง 2. $1+5\neq 2$ 3. $-2+5\neq 2$

4. $3+(-2)\neq 2$ 5. $-3+4\neq 2$

จะเห็นว่ามีข้อ 1. ข้อเดียว ที่อยู่บนเส้นตรง N

15. ตอบ : 2

วิธีทำ (ก) จะหา $f(x)$ และ $f'(x)$ แล้ว แทน $x=4$

จาก $f^{-1}(x)=\frac{2x}{x+1}$ ย้ายข้าง f^{-1} ไปเป็น f อีกข้าง จะได้ $x=f\left(\frac{2x}{x+1}\right)$

ให้ $k=\frac{2x}{x+1}$

$kx+k=2x$

$kx-2x=-k$

$x(k-2)=-k$

$x=-\frac{k}{k-2}$

$-\frac{k}{k-2}=f(k)$

เปลี่ยนชื่อตัวแปร k เป็น x จะได้ $f(x)=-\frac{x}{x-2}\ldots(*)$

ดังนั้น $f'(x)=-\frac{(x-2)(1)-(x)(1)}{(x-2)^2}$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{บน}}{\text{ล่าง}}\right)=\frac{\left(\text{ล่าง}\cdot\frac{d}{dx}\text{บน}\right)-\left(\text{บน}\cdot\frac{d}{dx}\text{ล่าง}\right)}{(\text{ล่าง})^2}}$$

$=-\frac{x-2-x}{(x-2)^2}$

$=\frac{2}{(x-2)^2}\quad\ldots(**)$

จาก $(*)$ จะได้ $f(4)=-\frac{4}{4-2}=-2$

จาก $(**)$ จะได้ $f'(4)=-\frac{2}{(4-2)^2}=\frac{1}{2}$

ดังนั้น $2f'(4)-f(4)=2\left(\frac{1}{2}\right)-(-2)=3\rightarrow$ ***(ก)ถูก***

(ข) ดิฟ $(**)$ จะได้ $f''(x)=\frac{d}{dx}2(x-2)^{-2}=-4(x-2)^{-3}\cdot\frac{d}{dx}(x-2)$

$=-4(x-2)^{-3}\cdot 1$

$=-\frac{4}{(x-2)^3}\quad\ldots(***)$

ดังนั้น $f''(f(4))=f''(-2)=-\frac{4}{(-2-2)^3}=\frac{1}{16}$ (จากข้อ (ก))

และ $f(f''(4))=f\left(-\frac{4}{(4-2)^3}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}-2}=-\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{5}{2}}=-\frac{1}{5}$ (จากข้อ $(***)$)

ไม่เท่ากัน $\rightarrow$ ***(ข)ผิด***

(ค) ฟังก์ชันเพิ่ม จะต้องมี $f'(x)$ เป็นบวก

จาก $(**)$ จะได้ $f'(x)=\frac{2}{(x-2)^2}\rightarrow$ จะเห็นว่า ตัวส่วน $(x-2)^2$ เป็นบวกเสมอ

ดังนั้น $\frac{2}{(x-2)^2}$ จะเป็นบวกเสมอ (ยกเว้นที่ $x=2$ จะหาค่าไม่ได้) $\rightarrow$ ดังนั้น $f'(x)$ เป็นบวกบนช่วง $(0,2)\rightarrow$ ***(ค)ถูก***

16. ตอบ : 4

วิธีทำ จาก $|\vec{A}|=|\vec{B}|$ จะได้ $|16\bar{i}+a\bar{j}|=|8\bar{i}+b\bar{j}|$

$$\sqrt{16^2+a^2}=\sqrt{8^2+b^2}$$

$$256+a^2=64+b^2 \quad \ldots(*)$$

และจากสูตร $\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$ จาก $|\vec{A}|=|\vec{B}|$ และ $\vec{B}$ ทำมุม 60° กับ $\vec{A}$

$$(16\bar{i}+a\bar{j})\cdot(8\bar{i}+b\bar{j})=|\vec{A}||\vec{B}|\cos 60^\circ$$

$$(16)(8)+ab=|\vec{A}|^2\cdot\frac{1}{2}$$

$$128+ab=\sqrt{16^2+a^2}^{\,2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$256+2ab=256+a^2$$

$$0=a^2-2ab$$

$$0=a(a-2b)$$

$$a=0 \text{ หรือ } a=2b$$

แทนแต่ละแบบใน $(*)$ กรณี $a=0$:

$$256+0^2=64+b^2$$

$$192=b^2$$

$$\pm\sqrt{192}=b$$

กรณี $a=2b$:

$$256+(2b)^2=64+b^2$$

$$256+4b^2=64+b^2$$

$$3b^2=-192$$

ไม่มีคำตอบ ($3b^2$ เป็นลบไม่ได้)

ดังนั้น มีคำตอบเดียว คือ $a=0$ และ $b=\pm\sqrt{192}$

จะได้ $(a+b)^2=\left(0+(\pm\sqrt{192})\right)^2=(\pm\sqrt{192})^2=192$

17. ตอบ : 3

วิธีทำ มีคนทั้งหมด 8 คน ดังนั้น จะได้จำนวนแบบทั้งหมด $= 8!$

"หรือ" คือ "ยูเนียน" ดังนั้น จำนวนแบบที่โจทย์ต้องการ จะหาได้จากสูตร

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

นั่นคือ จำนวนแบบที่ไม่มี ช ติดกัน หรือ ไม่มี ญ ติดกัน $=$ จำนวนแบบที่ไม่มี ช ติดกัน $+$ จำนวนแบบที่ไม่มี ญ ติดกัน $-$ จำนวนแบบที่ไม่มี ช ไม่ติดกัน และไม่มี ญ ติดกัน

จำนวนแบบที่ไม่มี ช ติดกัน $\rightarrow$ ขั้นที่ 1 : เอา ญ ทั้ง 4 คนมาเข้าแถวปักเป็นหลักไว้ก่อน ได้ $4!$ แบบ

$\rightarrow$ ขั้นที่ 2 : จะเหลือช่องให้ ช เข้าไปแทรกได้ 5 จุด ดังรูป

ดังนั้น ช1 เลือกยืนได้ 5 แบบ

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

_ ญ _ ญ _ ญ _ ญ _

ช2 จะยืนได้ 4 แบบ (เพราะ ช ห้ามยืนติดกัน)

ช3 ยืนได้ 3 แบบ และ ช4 ยืนได้ 2 แบบ

รวมจะได้จำนวนแบบที่ ช ไม่ติดกัน $= 4! \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 4!5!$ แบบ

จำนวนแบบที่ไม่มี ญ ติดกัน $\rightarrow$ คิดแบบเดิม แต่เอา ช ทั้ง 4 ไปยืนเข้าแถวปักเป็นหลักไว้ก่อน แล้วเอา ญ เข้าไปแทรก จะได้จำนวนแบบที่ ญ ไม่ติดกัน $= 4!5!$ แบบ เหมือนอันแรก

จำนวนแบบที่ไม่มี ช ไม่ติดกัน และไม่มี ญ ติดกัน $\rightarrow$ ขั้นที่ 1 : เลือกใครก็ได้มายืนตำแหน่งแรก ได้ 8 แบบ

$\rightarrow$ ขั้นที่ 2 : ตำแหน่งที่ 2 ต้องเป็นคนละเพศกับตำแหน่งแรก จะมีคนที่เป็นเพศตรงข้ามให้เลือกได้ 4 คน

$\rightarrow$ ขั้นที่ 3 : ตำแหน่งที่ 3 ต้องเป็นคนละเพศกับตำแหน่งที่ 2 แต่ต้องไม่ซ้ำกับคนตำแหน่งที่ 1 จะเหลือให้เลือกได้ 3 คน

ทำแบบนี้ไปเรื่อยๆ จะได้จำนวนแบบของแต่ละตำแหน่งคือ $\underline{8}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{1}$

จะได้จำนวนแบบ $= 8 \cdot 4!3!$

ดังนั้น จำนวนแบบที่ไม่มี ช ติดกัน หรือ ไม่มี ญ ติดกัน $= 2(4!5!) - 8 \cdot 4!3!$

จะได้ ความน่าจะเป็น $= \dfrac{2(4!5!) - 8 \cdot 4!3!}{8!} = \dfrac{2(5!) - 8 \cdot 3!}{8 \times 7 \times 6 \times 5} = \dfrac{5-1}{7 \times 5} = \dfrac{4}{35}$

18. ตอบ : 4

วิธีทำ (ก) ถ้า $x \le 0$ จะได้ $f(x)$ ต้องใช้สูตรบน จะได้ $f(x)=\sqrt{9-x}$

ดังนั้น $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\sqrt{9-x}\right)$

และเนื่องจาก $x \le 0$ จะได้ $-x \ge 0$

$9-x \ge 9$

$\sqrt{9-x} \ge 3 \rightarrow$ ดังนั้น $g\left(\sqrt{9-x}\right)$ ต้องใช้สูตรล่าง $g(x)=x-4$

จะได้ $g\left(\sqrt{9-x}\right)=\sqrt{9-x}-4 \rightarrow$ ***(ก) ถูก***

(ข) ถ้า $4<x\le 6$ จะได้ $f(x)$ ต้องใช้สูตรล่าง จะได้ $f(x)=7-x$

ดังนั้น $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(7-x)$

และเนื่องจาก $4<x\le 6$ จะได้ $-4 > -x \ge -6$

$7-4>7-x\ge 7-6$

$3>7-x\ge 1$

$\rightarrow$ ดังนั้น $g(7-x)$ ต้องใช้สูตรล่าง $g(x)=x-4$

จะได้ $g(7-x)=7-x-4=3-x \rightarrow$ ***(ข) ถูก***

(ค) ถ้า $x>6$ จะได้ $f(x)$ ต้องใช้สูตรล่าง จะได้ $f(x)=7-x$

ดังนั้น $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(7-x)$

และเนื่องจาก $x>6$ จะได้ $-x<-6$

$7-x<-6$

$7-x<1 \rightarrow$ ดังนั้น $g(7-x)$ ต้องใช้สูตรบน $g(x)=x+2$

จะได้ $g(7-x)=7-x+2=9-x \rightarrow$ ***(ค) ถูก***

19. ตอบ : 2

วิธีทำ ให้ $z=x+yi$ จะได้ $\bar{z}=x-yi \rightarrow$ จะได้ $\bar{z}-z=(x-yi)-(x+yi)$

$=x-yi-x-yi$

$=-2yi$

แทนในสมการ จะได้ $(1+i)(x-yi)-\dfrac{(9-7i)(-2yi)}{3+i}=6-2i$

คูณ $3+i$ ตลอด

$(3+i)(1+i)(x-yi)-(9-7i)(-2yi)=(6-2i)(3+i)$

$(2+4i)(x-yi)+18yi+14y=20+0i$

$2x-2yi+4xi+4y+18yi+14y=20$

$2x+18y+(4x+16y)i=20+0i$

หาร 2 ตลอด

$x+9y+(2x+8y)i=10+0i$

เทียบส่วนจริง กับส่วนจินตภาพของทั้งสองฝั่ง จะได้ $x+9y=10 \ldots(1)$ และ $2x+8y=0$

$$x+4y=0 \ldots(2)$$

$$(1)-(2): \quad 5y=10$$

$$y=2 \rightarrow \text{แทนใน } (2): x+4(2)=0$$

$$x=-8$$

ดังนั้น $z=-8+2i$

(ก) $|z+8|=|-8+2i+8|=|2i|=2 \rightarrow$ ***(ก) ถูก***

(ข) $|z+3i|=|-8+2i+3i|=|-8+5i|=\sqrt{(-8)^2+5^2}=\sqrt{89} \rightarrow$ ***(ข) ผิด***

(ค) $|iz+2|=|i(-8+2i)+2|=|-8i-2+2|=|-8i|=8 \rightarrow$ ***(ค) ถูก***

20. ตอบ : 3

วิธีทำ แทนหาพจน์แรกๆดู จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1\cdot2^3}{3^3}+\frac{2\cdot2^6}{3^5}+\frac{3\cdot2^9}{3^7}+\frac{4\cdot2^{12}}{3^9}+\ldots$

เป็นอนุกรมผสม เลขคณิต เรขาคณิต$\left(r=\frac{2^3}{3^2}\right)$ต้องใช้เทคนิค คูณ r เพื่อเลื่อนพจน์ แล้วหักกับตัวมันเอง

ให้

$$\frac{1\cdot2^3}{3^3}+\frac{2\cdot2^6}{3^5}+\frac{3\cdot2^9}{3^7}+\frac{4\cdot2^{12}}{3^9}+\cdots = x \quad \ldots(1)$$

คูณ $\frac{2^3}{3^2}$ ตลอด และเลื่อนพจน์

$$\frac{1\cdot2^6}{3^5}+\frac{2\cdot2^9}{3^7}+\frac{3\cdot2^{12}}{3^9}+\frac{4\cdot2^{15}}{3^{11}}+\cdots = \frac{2^3}{3^2}x \quad \ldots(2)$$

$(1)-(2)$:

$$\underbrace{\frac{1\cdot2^3}{3^3}+\frac{1\cdot2^6}{3^5}+\frac{1\cdot2^9}{3^7}+\frac{1\cdot2^{12}}{3^9}+\cdots}_{} = x-\frac{2^3}{3^2}x$$

อนุกรมเรขาคณิตอนันต์ $a_1=\frac{1\cdot2^3}{3^3}=\frac{8}{27}$ และ $r=\frac{2^3}{3^2}=\frac{8}{9}$

เนื่องจาก $|r|<1$ ดังนั้น อนุกรมลู่เข้า และ $S_\infty=\frac{a_1}{1-r}$

$$\frac{\frac{8}{27}}{1-\frac{8}{9}} = x-\frac{8}{9}x$$

$$\frac{8}{27}\cdot\frac{9}{1} = \frac{1}{9}x$$

$$24 = x$$

21. ตอบ : 1

วิธีทำ ข้อมูลชุดที่ 2 จะได้จากการเอาข้อมูลชุดที่ 1 มา ลบ 4 → คูณ 2 → บวก 4 ตามลำดับ ดังรูป

$$
\begin{array}{l|llll}
 & x_1+4, & x_2+4, & \ldots, & x_{20}+4 \\
\text{ลบ } 4 & x_1, & x_2, & \ldots, & x_{20} \\
\text{คูณ } 2 & 2x_1, & 2x_2, & \ldots, & 2x_{20} \\
\text{บวก } 4 & 2x_1+4, & 2x_2+4, & \ldots, & 2x_{20}+4
\end{array}
$$

ค่าเฉลี่ยเลข *คณิต* : จะสอดคล้องกันด้วยสูตรเดียวกัน (คือ ลบ 4 → คูณ 2 → บวก 4)

จาก $\bar{x}_{\text{ชุด1}} = 50$: จะได้ $50 \xrightarrow{\text{ลบ } 4} 46 \xrightarrow{\text{คูณ } 2} 92 \xrightarrow{\text{บวก } 4} 96$ ดังนั้น $\bar{x}_{\text{ชุด2}} = 96$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน : การบวกหรือลบข้อมูลทุกตัวเท่าๆกัน จะไม่ทำให้ s เปลี่ยน (แต่การคูณ 2 จะยังคงทำให้ s เพิ่ม 2 เท่า)

จาก $S_{\text{ชุด2}} = 10$: จะได้ $10 \xrightarrow{\text{ลบ } 4} 10$ เท่าเดิม $\xrightarrow{\text{คูณ } 2} 20 \xrightarrow{\text{บวก } 4} 20$ เท่าเดิม ดังนั้น

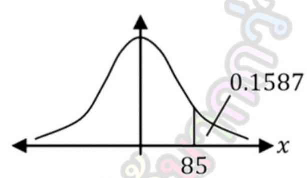
$S_{\text{ชุด2}} = 20$

จากสูตร $v = s^2$ จะได้ ความแปรปรวนของข้อมูลชุดที่ $2 = 20^2 = 400$

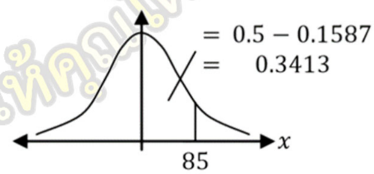
22. ตอบ : 4

วิธีทำ จากสูตร สัมประสิทธิ์การแปรผัน $= \frac{s}{\bar{x}}$ จะได้ $= \frac{s}{\bar{x}} = 25\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{4} \rightarrow$ คูณไขว้ จะได้ $4s = \bar{x}$ ...(*)

โจทย์ให้มีนักเรียนร้อยละ 15.87 ที่สอบได้คะแนนมากกว่า 85 คะแนน
เนื่องจาก 15.87% ไม่ถึงครึ่งหนึ่งของนักเรียนทั้งหมด
จะวาดได้ 85 คะแนนอยู่ฝั่งขวาดังรูป



พื้นที่ที่ใช้เปิดตาราง จะเป็นพื้นที่ที่วัดจากแกนกลาง
จะได้พื้นที่ที่ใช้เปิดตารางคือ 0.5 – 0.1587 = 0.3413 ดังรูป



เปิดตารางจะได้ $z = 1.0$

จากสูตร $z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ จะได้ $1.0 = \frac{85-\bar{x}}{s}$

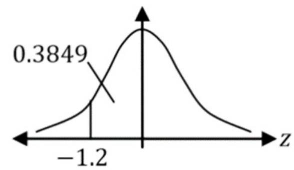
$$
\begin{aligned}
s &= 85 - \bar{x} \\
s &= 85 - 4s \\
5s &= 85 \\
s &= 17 \quad \rightarrow \text{ แทนใน } (*) \text{ จะได้ } \bar{x} = 4(17) = 68
\end{aligned}
$$

หาเปอร์เซ็นไทล์ของ ก ต้องหาค่า z ของ ก แล้วเอาไปเปิดตารางหาพื้นที่ทางซ้าย

จะได้ $z_n = \frac{47.6-\bar{x}}{s} = \frac{47.6-68}{17} = -\frac{20.4}{17} = -1.2$

z เป็นลบ จะอยู่ทางซ้ายของแกน

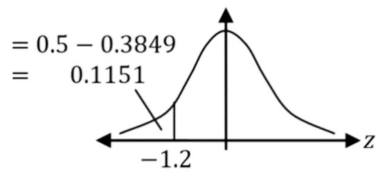
และเอา 1.2 ไปเปิดตาราง จะได้พื้นที่ $= 0.3849$ ดังรูป



จะได้ พื้นที่ทางซ้าย $= 0.5 - 0.3849 = 0.1151$

ดังนั้น มีข้อมูล 11.51% ที่น้อยกว่า ก

นั่นคือ คะแนนของนาย ก คือ เปอร์เซ็นไทล์ที่ 11.51



23. **ตอบ : 5**

วิธีทำ จะเห็นว่า $\underset{1\text{ พจน์}}{1} + \underbrace{2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n}_{n\text{ พจน์}}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มี $a_1 = 1$ และ $r = 2$ แต่มีจำนวนพจน์ $= n+1$ พจน์

จากสูตรอนุกรมเรขาคณิต จะได้ $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = \frac{1\left(1-2^{n+1}\right)}{1-2} = 2^{n+1} - 1$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}}$$

แทนใน a_n ที่โจทย์ให้ จะได้ $a_n = \frac{2^{n+1}-1}{3^{2n}}$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n\right) = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

จาก $a_n = \frac{2^{n+1}-1}{3^{2n}}$

$$= \frac{2^2-1}{3^2} + \frac{2^3-1}{3^4} + \frac{2^4-1}{3^6} + \ldots$$

$$= \frac{2^2}{3^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{2^3}{3^4} - \frac{1}{3^4} + \frac{2^4}{3^6} - \frac{1}{3^6} + \ldots$$

$$= \left(\frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^4} + \frac{2^4}{3^6} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \ldots\right)$$

$$a_1 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9} \qquad a_1 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$r = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9} \qquad r = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{อนุกรมเรขาคณิตอนันต์} \\ |r| < 1 \rightarrow S_\infty = \frac{a_1}{1-r}\end{array}}$$

$$= \left(\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{2}{9}}\right) - \left(\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{7}\right) - \left(\frac{1}{9}\cdot\frac{9}{8}\right)$$

$$= \frac{4}{7} - \frac{1}{8} = \frac{25}{56}$$

24. ตอบ : 4

วิธีทำ จาก $A=\left\{x^2 \middle| x\in \mathbb{I}\cap D_r\right\} \rightarrow$ จะหา A ได้ ต้องหา D_r ก่อน

จาก $y=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{4-x}-\sqrt{2x+1}} \rightarrow$ ในรูทห้ามติดลบ และ ส่วนห้ามเป็น 0

$4-x\geq 0$ $\quad$ $2x+1\geq 0$

$4 \geq x$ $\quad$ $x \geq -\frac{1}{2}$

$\sqrt{4-x}-\sqrt{2x+1}\neq 0$

$\sqrt{4-x} \neq \sqrt{2x+1}$

$4-x \neq 2x+1$

$3 \neq 3x$

$1 \neq x$

จะได้ $-\frac{1}{2}\leq x\leq 4$ และ $x\neq 1$

$\mathbb{I}\cap D_r$ คือเอาเฉพาะจำนวนเต็ม $\rightarrow$ เหลือ $0,2,3,4$

จะได้ $A=\left\{0^2,2^2,3^2,4^2\right\}$ ดังนั้น ผลบวกสมาชิกของ $A=0^2+2^2+3^2+4^2=29$

25. **ตอบ : 5**

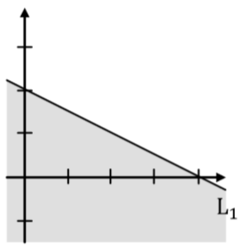
วิธีทำ หาจุดตัดแกนของเส้นตรง วาดกราฟ และแทนจุดที่ไม่ได้อยู่บนเส้นกราฟ $(0,0)$ เพื่อแรเงา จะได้ดังรูป

$L_1 : x+2y \le 4$

จุดตัดแกน

x	0	4
y	2	0

จุด $(0,0) \rightarrow$ อสมการเป็นจริง
แรเงาส่วนซ้ายล่างที่มี $(0,0)$

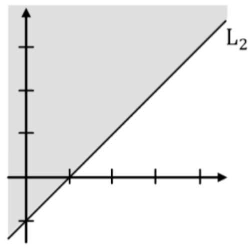


$L_2 : x-y \le 1$

จุดตัดแกน

x	0	1
y	-	0

จุด $(0,0) \rightarrow$ อสมการเป็นจริง
แรเงาส่วนซ้ายบนที่มี $(0,0)$

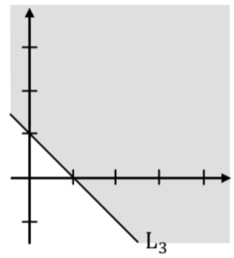


$L_3 : x+y \ge 1$

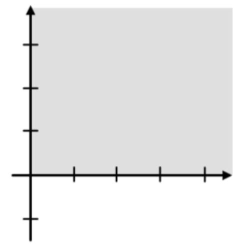
จุดตัดแกน

x	0	1
y	-	0

จุด $(0,0) \rightarrow$ อสมการเป็น*เท็จ*
แรเงาส่วนขวาบนที่*ไม่*มี $(0,0)$



$x \ge 0$ และ
$y \ge 0$
คือ บริเวณใน Q_1



นาทง 4 รูป มาหาสวนซอนทบกน จะเดดงรูป

จะได้พิกัด $A(0,1)$, $B(0,2)$, $D(1,0)$

พิกัด C ต้องแก้ระบบสมการ L_1 กับ L_2

$L_1 : \quad x+2y = 4 \quad \ldots(1)$

$L_2 : \quad x-y = 1 \quad \ldots(2)$

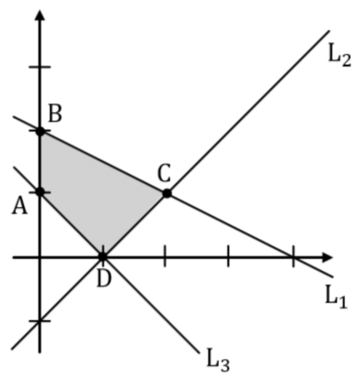
$(1)-(2) : \quad 3y = 3$

$y = 1$

แทนใน $(2) : x-1 = 1$

$x = 2$

จะได้พิกัด $C(2,1)$



เอา $A(0,1)$, $B(0,2)$, $C(2,1)$, $D(1,0)$ ไปแทนในตัวเลือกทั้ง 5 แล้วดูว่าค่าที่สูงที่สุดว่ามาจากตัวเลือกไหน

ไม่ต้องคิด $A(0,1)$ ก็ได้
เพราะยังไงก็แพ้ $B(0,2)$

ไม่ต้องคิด $2x+2y$ ก็ได้
เพราะยังไงก็แพ้ $3x+2y$

	A(0,1)	B(0,2)	C(2,1)	D(1,0)
2x+2y	-	-	-	-
3x+2y	-	4	8	3
2x+3y	-	6	7	2
x+4y	-	8	6	1
4x+y	-	2	9	4

มากสุด

จะเห็นว่า ค่ามากสุด $=9$ เกิดจาก $z = 4x+y$ จากตัวเลือกในข้อ 5

26. ตอบ : 4

วิธีทำ จาก

$$AB^{-1} = B^{-1}A$$
$$AB^{-1}B = B^{-1}AB \quad \text{คูณ B ทางขวาทั้งสองฝั่ง เพื่อตัดกับ } B^{-1} \text{ ฝั่งซ้าย}$$
$$A = B^{-1}AB$$
$$BA = BB^{-1}AB \quad \text{คูณ B ทางซ้ายทั้งสองฝั่ง เพื่อตัดกับ } B^{-1} \text{ ฝั่งขวา}$$
$$BA = AB$$

แทน $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ ใน $BA = AB$ จะได้ $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}a+2b & 2a+b\\ c+2d & 2c+d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+2c & b+2d\\ 2a+c & 2b+d\end{bmatrix}$$

เทียบสมาชิกแต่ละตัว จะได้

$$a+2b = a+2c \qquad b = c$$
$$2a+b = b+2d \qquad a = d$$
$$\begin{bmatrix}a+2b & 2a+b\\ c+2d & 2c+d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+2c & b+2d\\ 2a+c & 2b+d\end{bmatrix}$$
$$c+2d = 2a+c \qquad d = a$$
$$2c+d = 2b+d \qquad c = b$$

จะสรุปได้ว่า $b = c$ และ $a = d \rightarrow$ แทนในข้อมูลที่โจทย์ให้

จาก

$$\det(A^tB) = -24$$
$$(\det A^t)(\det B) = -24 \quad \text{กระจาย det ในการคูณ}$$
$$(\det A)(\det B) = -24 \quad \det A^t = \det A$$
$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} = -24$$
$$(1-4)(ad-bc) = -24$$
$$ad-bc = 8$$
$$d^2-c^2 = 8 \quad a=d, b=c$$
$$d^2 = c^2+8$$

จาก

$$abcd = 9$$
$$c^2d^2 = 9 \quad a=d, b=c$$
$$c^2(c^2+8) = 9$$
$$c^4+8c^2-9 = 0$$
$$(c^2+9)(c^2-1) = 0$$

$c^2 = -9$ (ไม่มีคำตอบ) (c^2 เป็นลบไม่ได้)

$c^2 = 1$

$c = 1, \cancel{-1}$

โจทย์ให้ a,b,c,d เป็นบวก

จะได้ $c = 1 \rightarrow$ แทนใน $d^2 = c^2+8 = 1^2+8 = 9 \rightarrow$ จะได้ $d = 3$

ดังนั้น $a = d = 3$ และ $b = c = 1 \rightarrow$ จะได้ $a+b+c+d = 3+1+1+3 = 8$

27. ตอบ : 3

วิธีทำ (ก) สังเกตว่า $|\bar{a}-\bar{b}|$ ทางซ้าย คือขนาดของเวกเตอร์ $\bar{a}-\bar{b}$ จะเป็นบวกเสมอ

แต่ $|\bar{a}|-|\bar{b}|$ ทางขวา มีโอกาสเป็นลบได้ ถ้า $\bar{a}$ สั้นกว่า $\bar{b}$

ดังนั้น ถึง $\bar{a}$ จะขนานกับ $\bar{b}$ แต่ถ้า $\bar{a}$ สั้นกว่า $\bar{b}$ จะทำให้ $|\bar{a}-\bar{b}| \neq |\bar{a}|-|\bar{b}| \rightarrow$ ***(ก) ผิด***

(ข) จาก

$$\begin{aligned} |\bar{a}+\bar{b}|^2 &= |\bar{a}|^2-|\bar{b}|^2 \\ |\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+2\bar{a}\cdot\bar{b} &= |\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2 \\ 2\bar{a}\cdot\bar{b} &= 0 \\ \bar{a}\cdot\bar{b} &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{|\bar{u}+\bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2+|\bar{v}|^2+2\bar{u}\cdot\bar{v}}$$

เนื่องจาก $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ ถ้า $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ จะสรุปได้ว่า $\bar{a}\perp\bar{b} \rightarrow$ ***(ข) ถูก***

(ค) จาก จะสรุปได้ว่า $\bar{a}+\bar{b}\perp\bar{a}-\bar{b}$

จะสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned} (\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b}) &= 0 \\ \bar{a}\cdot\bar{a}-\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{a}-\bar{b}\cdot\bar{b} &= 0 \\ |\bar{a}|^2 \qquad -|\bar{b}|^2 &= 0 \\ |\bar{a}|^2 &= |\bar{b}|^2 \\ |\bar{a}| &= |\bar{b}| \rightarrow \textit{(ค) ถูก} \end{aligned}$$

เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกัน จะดอทกันได้ 0

$$\boxed{\bar{u}\cdot\bar{u} = |\bar{u}|^2}$$

28. ตอบ : 1

วิธีทำ จะเห็นว่า สมการที่เกิดจากคู่ที่อยู่ติดกัน สามารถตัดตัวแปร และจัดรูปได้ดังนี้

$$a+b-4 \;=\; b+c+5 \;=\; c+d+1 \;=\; d+e-2 \;=\; e+a+3$$

ตัด b ย้ายข้าง	ตัด c ย้ายข้าง	ตัด d ย้ายข้าง	ตัด e ย้ายข้าง
$a=c+9$	$b=d-4$	$c=e-3$	$d=a+5$
(1)	(2)	(3)	(4)

จะเห็นว่า มี 5 ตัวแปร แต่มี 4 สมการ จะมีสมการไม่พอ

ทำได้อย่างมากคือจัดรูปทุกตัวแปรให้อยู่ในรูปของตัวแปรหนึ่ง $\rightarrow$ จะจัด b,c,d,e ให้อยู่ในรูปของ a

จาก (1) จะได้ $c=a-9 \rightarrow$ แทนใน (3) จะได้ $a-9=e-3$

$a-6=e$

จาก (4) จะได้ $d=a+5 \rightarrow$ แทนใน (2) จะได้ $b=a+5-4$

$=a+1$

จะได้ $b=a+1,\ c=a-9,\ d=a+5,\ e=a-6$

(ก) $\quad c+e \quad < \quad b+d$

$(a-9)+(a-6)<(a+1)+(a+5)$

$-15 < 6 \rightarrow$ *ถูก*

(ข) จะเห็นว่า $a-9<a-6<a<a+1<a+5$

ดังนั้น $c < e < a < b < d \rightarrow$ *ผิด*

(ค) $a+d < b+c$

$a+(a+5) < (a+1)+(a-9)$

$5 < -8 \rightarrow$ *ผิด*

29. ตอบ : 2

วิธีทำ หา $\bar{x} \rightarrow$ สมมติให้แต่ละชั้นมีคะแนนเท่ากับจุดกึ่งกลางชั้น

คะแนน	จำนวน (f_i)	จุดกึ่งกลางชั้น (x_i)	$f_i x_i$
0 – 2	3	$=\frac{0+2}{2}=1$	$=(3)(1) = 3$
3 – 5	5	$=\frac{3+5}{2}=4$	$=(5)(4) = 20$
6 – 8	a	7	$=(7)(a) = 7a$
9 – 11	3	10	$=(3)(10) = 30$
	$a+11$		$7a+53$

จากตาราง จะได้ $\bar{x}=\frac{7a+53}{a+11}$ แต่โจทย์ให้ $\bar{x}=5$ ดังนั้น $\frac{7a+53}{a+11}=5$

$7a+53=5a+55$

$2a = 2$

$a = 1$

แทน $a=1$ ในตาราง จะได้ดังรูป
หาความถี่สะสม เพื่อหามัธยฐาน

คะแนน	จำนวน	ความถี่สะสม
0-2	3	3
3-5	5	8
6-8	1	9
9-11	3	12

จะได้ตำแหน่งมัธยฐาน $=\frac{12}{2}=6$

จะเห็นว่า ความถี่สะสมเกิน 6 ครั้งแรก ในชั้นที่ 2 $\rightarrow$ มัธยฐานอยู่ชั้นที่ 2

จะได้ มัธยฐาน $=L+\left(\frac{\frac{N}{2}-F_L}{f_m}\right)I = 2.5+\left(\frac{6-3}{5}\right)(3) = 2.5+1.8=4.3$

30. ตอบ : 1

วิธีทำ มีผู้หญิง 60% $\rightarrow$ แสดงว่ามีผู้ชาย 40%

ในผู้หญิง 60% ถ้าสมมติให้มีผู้หญิงสายตาปกติ x%
จะมีผู้หญิงสายตาผิดปกติ $60-x\%$

ในผู้ชาย 40% ถ้าสมมติให้มีผู้ชายสายตาปกติ y%
จะมีผู้ชายสายตาผิดปกติ $40-y\%$

จะวาดได้ดังรูป

โจทย์

	ปกติ	ผิดปกติ
หญิง	x	60 - x
ชาย	y	40 - y

กำหนดให้

$$\frac{\text{หญิง ผิดปกติ}}{\text{หญิง ปกติ}} = \frac{\text{ผิดปกติ ทั้งหมด}}{\text{ปกติ ทั้งหมด}}$$

$$\frac{60-x}{x} = \frac{60-x+40-y}{x+y}$$

$$(60-x)(x+y) = (100-x-y)(x)$$

$$60x+60y-x^2-xy = 100x-x^2-xy$$

$$60x+60y = 100x$$

$$60y = 40x$$

$$y = \frac{2x}{3} \quad \ldots(*)$$

(ก) หญิง ผิดปกติ $=1.5$ (ชายผิดปกติ)

$$60-x = 1.5(40-y)$$

จาก $(*)$

$$60-x = 1.5\left(40-\frac{2x}{3}\right)$$

คูณกระจาย 1.5

$$60-x = 60-x$$

(ก) ถูก

(ข) ชาย ปกติ $>$ หญิง ปกติ

$$y > x$$

จาก $(*)$

$$\frac{2}{3}x > x$$

(ข) ผิด

(ค)

$$\frac{\text{หญิง ผิดปกติ}}{\text{หญิง ทั้งหมด}} > \frac{\text{ชาย ผิดปกติ}}{\text{ชาย ทั้งหมด}}$$

$$\frac{60-x}{60} > \frac{40-y}{40}$$

จาก $(*)$

$$\frac{60-x}{3} > \frac{40-\frac{2x}{3}}{2}$$

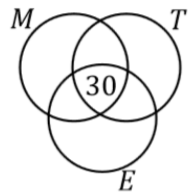
คูณไขว้

$$120-2x > 120-2x$$

(ค) ผิด

31. ตอบ : 230

วิธีทำ มีนักเรียน 30 คน ชอบทั้งสามวิชา $\rightarrow$ วาดได้ดังรูป



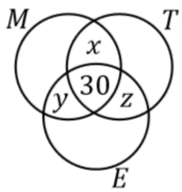
ข้อนี้ต้องสมมติให้นักเรียนกลุ่มนี้ชอบอย่างน้อย 1 วิชา

จะได้จำนวนนักเรียนทั้งหมด $= n(M \cup T \cup E)$

จากสูตร Inclusive – Exclusive จะได้

$$n(M \cup T \cup E) = n(M) + n(T) + n(E) - n(M \cap T) - n(T \cap E) - n(M \cap E) + n(M \cap T \cap E)$$

$$= 150 + 80 + 60 - n(M \cap T) - n(T \cap E) - n(M \cap E) + 30$$



สมมติ x, y, z สำหรับ $n(M \cap T), n(T \cap E), n(M \cap E)$

$$= 150 + 80 + 60 - (x+30) - (z+30) - (y+30) + 30$$

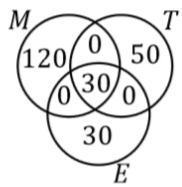
$$= 150 + 80 + 60 - x - 30 - z - 30 - y - 30 + 30$$

$$= 230 - x - z - y$$

$$\leq 230$$

x, y, z แทนจำนวนคน $\rightarrow x, y, z \geq 0$

จะได้จำนวนคนมากสุด $= 230$ เมื่อ $x, y, z = 0$ ดังรูป



32. ตอบ : 126

วิธีทำ สังเกตว่า เราสามารถจัดรูปสมการให้มี $3^{|x+4|}$ และ $3^{|x|}$ เป็นตัวแปรได้ ดังนี้

$$3\left(9 + 3^{|x|+|x+4|}\right) = 3^{|x+4|} + 3^{|x|+4}$$

$$3\left(9 + 3^{|x|} \cdot 3^{|x+4|}\right) = 3^{|x+4|} + 3^{|x|} \cdot 3^{4}$$

ให้ $3^{|x+4|} = a$, $3^{|x|} = b$

$$3(9 + b \cdot a) = a + b \cdot 3^{4}$$

$$27 + 3ab = a + 81b$$

$$3ab - a - 81b + 27 = 0$$

$$a(3b-1) - 27(3b-1) = 0$$

$$(a-27)(3b-1) = 0$$

$$\begin{aligned} a &= 27 \\ 3^{|x+4|} &= 3^{3} \\ |x+4| &= 3 \\ x+4 &= 3, -3 \\ x &= -1, -7 \end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{3} \\ 3^{|x|} &= 3^{-1} \\ |x| &= -1 \end{aligned}$$

ไม่มีคำตอบ
(ค่าสัมบูรณ์เป็นลบไม่ได้)

ดังนั้น ผลบวกของสมาชิกใน $B = \left(59 - (-1)\right) + \left(59 - (-7)\right) = 60 + 66 = 126$

33. ตอบ : 5

วิธีทำ โจทย์ให้ เส้นตรง $6x-y=4$ ตัดกับกราฟ $y=f(x)$ ที่ $x=2$

แทน $x=2$ ในสมการเส้นตรง จะได้ $6(2)-y=4$

$8 = y$ $\rightarrow$ จะได้จุดตัดคือ $(2,8)$

ดังนั้น $(2,8)$ อยู่บนกราฟ $y=f(x)$ ด้วย จะได้ $f(2)=8$ ...(*)

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{\sqrt{1+f(x)}-3}$ จะเห็นว่า ถ้าแทน $x=2$ จะได้ $\frac{2^2+2-6}{\sqrt{1+f(2)}-3}=\frac{0}{\sqrt{1+8}-3}=\frac{0}{0}$

จาก (*)

ลิมิตอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ $\rightarrow$ จะใช้กฎของโลปิตาลได้

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{\sqrt{1+f(x)}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{d}{dx}x^2+x-6}{\frac{d}{dx}\sqrt{1+f(x)}-3}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{\frac{1}{2}(1+f(x))^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dx}(1+f(x))}$$

ดิฟลูกโซ่

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{\frac{1}{2}(1+f(x))^{-\frac{1}{2}}\cdot f'(x)}$$

$$=\frac{2(2)+1}{\frac{1}{2}(1+f(x))^{-\frac{1}{2}}\cdot f'(2)}$$

จาก (*)

$$=\frac{5}{\frac{1}{2}(1+8)^{-\frac{1}{2}}\cdot f'(2)}$$

$$=\frac{5}{\frac{1}{6}\cdot f'(2)}=\frac{30}{f'(2)}$$

แต่โจทย์ให้ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{\sqrt{1+f(x)}-3}=6$ ดังนั้น $\frac{30}{f'(2)}=6$ จะได้ $f'(2)=\frac{30}{6}=5$

34. ตอบ : 9.25

วิธีทำ

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & , \quad x<-1 \\ ax+b & , \quad -1\le x<1 \\ 3x^2+2 & , \quad x\ge 1 \end{cases}$$

ตรงรอยต่อ $x=-1$ จะได้ $(-1)^3=a(-1)+b$

$$-1=-a+b$$

$$a-b=1 \quad \ldots(1)$$

ตรงรอยต่อ $x=1$ จะได้ $a(1)+b=3(1^2)+2$

$$a+b=5 \quad \ldots(2)$$

$(1)+(2):\ 2a=6$

$a=3$

แทนใน $(2): 3+b=5$

$b=2$

แทนค่า a,b จะได้ $f(x)=\begin{cases} x^3 & , \quad x<-1 \\ ax+b & , \quad -1\le x<1 \\ 3x^2+2 & , \quad x\ge 1 \end{cases}$

จะหา $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ ต้องแบ่งเป็น 3 ช่วงตามเงื่อนไขของ $f(x)$

$$=\int_{-2}^{-1} x^3dx+\int_{-1}^{1} 3x+2dx+\int_{1}^{2} 3x^2+2dx$$

$$=\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-2}^{-1}+\left.\frac{3x^2}{2}+2x\right|_{-1}^{1}+\left.x^3+2x\right|_{1}^{2}$$

$$=\left(\frac{(-1)^4}{4}-\frac{(-2)^4}{4}\right)+\left(\left(\frac{3(1)^2}{2}+2(1)\right)-\left(\frac{3(-1)^2}{2}+2(-1)\right)\right)+\left(\left(2^3+2(2)\right)-\left(1^3+2(1)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{4}-4+\frac{3}{2}+2-\frac{3}{2}+2+12-3=9.25$$

35. ตอบ : 32

วิธีทำ จะได้ $L(n)=\log_{2^n}\left(\sqrt[n]{a}\right)$

$$=\log_{2^n}\left(a^{1/n}\right)$$

$$=\frac{1/n}{n}\log_2 a$$

$$=\frac{\log_2 a}{n^2}$$

ดังนั้น $\frac{1}{L(n)}=\frac{n^2}{\log_2 a}$ แทนในโจทย์ จะได้ $\frac{1}{L(1)}+\frac{1}{L(2)}+\ldots+\frac{1}{L(10)}=\frac{1^2}{\log_2 a}+\frac{2^2}{\log_2 a}+\frac{3^2}{\log_2 a}+\ldots+\frac{10^2}{\log_2 a}$

$$=\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+10^2}{\log_2 a}$$

$$=\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+10^2}{\log_2 a}$$

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$=\frac{\frac{10(10+1)(2(10)+1)}{6}}{\log_2 a}$$

$$=\frac{5(11)(7)}{\log_2 a}$$

แต่โจทย์ให้ $\frac{1}{L(1)}+\frac{1}{L(2)}+\ldots+\frac{1}{L(10)}=77$ ดังนั้น $=\frac{5(11)(7)}{\log_2 a}=77$

$$5=\log_2 a$$

$$2^5=a$$

$$32=a$$

36. ตอบ : 68

วิธีทำ พยายามจัดรูปสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ไปสู่สิ่งที่โจทย์ถาม ดังนี้

$$\begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ a & 4 & 1 \\ 5 & a & -a \end{vmatrix} = -17$$

ทรานสโพส จะทำให้หลัก 3 ตรงกับเมทริกซ์ที่โจทย์ถาม

ทรานสโพส → det ไม่เปลี่ยน

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 5 \\ b & 4 & a \\ 0 & 1 & -a \end{vmatrix} = -17$$

คูณ 2 ที่แถวหรือหลักหนึ่งๆ → det เป็น 2 เท่า

$$\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 2b & 4 & a \\ 0 & 1 & -a \end{vmatrix} = -34$$

เอาหลัก 1 มาคูณ 2 แล้ว สลับไปหลัก 2 จะทำให้ หลัก 2 ตรงกับเมทริกซ์ที่โจทย์ถาม

สลับหลัก → det เป็นลบของของเดิม

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 5 \\ 4 & 2b & a \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix} = 34$$

เอาหลัก 1 มาคูณ 2 ให้คล้ายกับเมทริกซ์ที่โจทย์ถาม

คูณ 2 ที่แถวหรือหลักหนึ่งๆ → det เป็น 2 เท่า

$$\begin{vmatrix} 2a & 2 & 5 \\ 8 & 2b & a \\ 2 & 0 & -a \end{vmatrix} = 68$$

เอาหลัก 3 มาบวกให้หลัก 1 จะได้เมทริกซ์ที่โจทย์ถาม

ทำแบบนี้ det ไม่เปลี่ยน

$$\begin{vmatrix} 2a+5 & 2 & 5 \\ 8+a & 2b & a \\ 2-a & 0 & -a \end{vmatrix} = 68$$

37. ตอบ : -

วิธีทำ ในลำดับเลขคณิต พจน์ที่อยู่ติดกัน จะเพิ่มขึ้น d เสมอ → นั่นคือ

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \quad \ldots(1) \\ a_4 &= a_3 + d \quad \ldots(2) \\ a_6 &= a_5 + d \quad \ldots(3) \\ &\vdots \\ a_{50} &= a_{49} + d \quad \ldots(25) \end{aligned}\right\} \text{บวกทั้ง 25 สมการ}$$

$$\underbrace{a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{50}}_{} = \underbrace{a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{49}}_{} + 25d$$

โจทย์ให้สองค่านี้เท่ากัน → ตัดกันได้

เหลือ $0 = 25d$ → จะได้ $d = 0$

$d = 0$ แสดงว่าแต่ละพจน์ ไม่เพิ่มขึ้นเลย → ทุกพจน์เท่ากันหมด

โจทย์ให้ $a_{100}=200$ แสดงว่าพจน์อื่นๆ ก็ต้องเท่ากับ 200 ด้วย $\rightarrow$ จะได้ $a_1=a_2=a_3=\ldots=200$
แต่ถ้าทุกพจน์เท่ากันหมด $=200$ จะไม่มีทางที่ $a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{49}=1275$ ได้
ดังนั้น ข้อนี้โจทย์ขัดแย้งกันเอง จึงไม่มีคำตอบ

38. ตอบ : 160

วิธีทำ เลข 3 จะใช้วิธี*แบ่งกรณี*นับ ส่วนเลข 1 กับเลข 2 จะใช้วิธี*นับแบบตรงข้าม*
ต้องมีเลข 3 อย่างมาก 2 หลัก $\rightarrow$ จะมีสามกรณีคือ “ไม่มีเลข 3 เลย” “มีเลข 3 หนึ่งหลัก” หรือ “มีเลข 3 สองหลัก”

กรณี ไม่มีเลข 3 เลย

มี 5 หลัก แต่ละหลักอาจเป็นเลข 1 หรือ 2 ได้หลักละ 2 แบบ $\rightarrow$ จะได้จำนวนแบบทั้งหมด $=2^5=32$ แบบ แต่โจทย์ต้องการให้มีเลข 1 อย่างน้อย 1 หลัก และเลข 2 อย่างน้อย 1 หลัก (คือต้องมีทั้งเลข 1 และ เลข 2) จะเห็นว่าใน 32 แบบนี้ จะมีแบบที่ใช้*ไม่ได้*อยู่ 2 แบบ คือ 1 ทั้งหมด กับ 2 ทั้งหมด (11111 กับ 22222)

ดังนั้น จะเหลือจำนวนแบบที่ “มีทั้งเลข 1 และ เลข 2” อยู่ $=32-2=30$ แบบ

กรณี มีเลข 3 หนึ่งหลัก

ขั้นที่ 1: เลือกตำแหน่งให้เลข 3 $\rightarrow$ มี 5 หลัก จะเลือกได้ 5 แบบ
ขั้นที่ 2: ที่เหลือ 4 หลัก แต่ละหลักอาจเป็นเลข 1 หรือ 2 ได้หลักละ 2 แบบ
จะได้จำนวนแบบทั้งหมด $=2^4=16$ แบบ
หักแบบที่ใช้ไม่ได้ 2 แบบ (คือ 1 ทั้งหมด กับ 2 ทั้งหมด) เหลือ $=16-2=14$ แบบ
รวมจำนวนแบบ $=5\times 14=70$ แบบ

กรณี มีเลข 3 สองหลัก

ขั้นที่ 1: เลือกตำแหน่งให้เลข 3 ทั้งสองตัว $\rightarrow$ มี 5 หลัก จะเลือกได้ $=\binom{5}{2}=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=10$ แบบ
ขั้นที่ 2: ที่เหลือ 3 หลัก แต่ละหลักอาจเป็นเลข 1 หรือ 2 ได้หลักละ 2 แบบ
จะได้จำนวนแบบทั้งหมด $=2^3=8$ แบบ
หักแบบที่ใช้ไม่ได้ 2 แบบ (คือ 1 ทั้งหมด กับ 2 ทั้งหมด) เหลือ $=8-2=6$ แบบ
รวมจำนวนแบบ $=10\times 6=60$ แบบ

รวมทุกกรณี จะได้จำนวนแบบ $=30+70+60=160$ แบบ

39. ตอบ : 3

วิธีทำ รูปแบบเส้นตรง คือ $\hat{Y} = a + bX$
ซึ่งจะหาค่า a และ b ได้จาก

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} y_i &= an + b\sum_{i=1}^{n} x_i && \ldots(1) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i &= a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 && \ldots(2) \end{aligned}$$

จากข้อมูลที่โจทย์ให้ จะได้ระบบสมการคือ

$$\begin{aligned} 48 &= a(8) + b(40) && \ldots(1) \\ 270 &= a(40) + b(210) && \ldots(2) \\ (1)\times 5:\ 240 &= a(40) + b(200) && \ldots(3) \\ (2)-(3):\ 30 &= b(10) \\ 3 &= b \\ \rightarrow (1):\ 48 &= a(8) + 3(40) \\ 6 &= a + 3(5) \\ -9 &= a \end{aligned}$$

จะได้สมการทำนายคือ $\hat{Y} = -9 + 3X$
ดังนั้น ถ้าอายุ 4 จะต้องใช้อาหาร $= -9 + 3(4) = 3$ กก.

40. ตอบ : 117

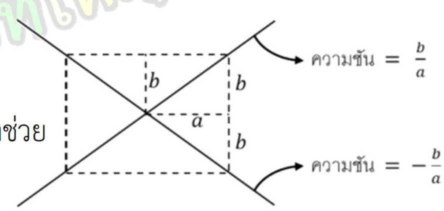
วิธีทำ จาก แกนตามขวางขนานแกน x
$\rightarrow$ จะได้เป็นไฮเพอร์โบลาแนวนอน
$\rightarrow$ ดังนั้น จุดโฟกัส และจุดศูนย์กลาง จะอยู่ในแนวนอนแนวเดียวกัน
$\rightarrow$ ดังนั้น จุดโฟกัส และจุดศูนย์กลาง จะมีพิกัด y เท่ากัน

โจทย์ให้ $F_1\left(1+2\sqrt{5}, 3\right)$ ดังนั้น พิกัดจุดศูนย์กลาง ต้องอยู่ในรูป $(h, 3)$ และเนื่องจากเส้นกำกับไฮเพอร์โบลาจะผ่านจุดศูนย์กลางไฮเพอร์โบลาเสมอ
ดังนั้น $(h, 3)$ ต้องสอดคล้องกับสมการเส้นกำกับ

$$\begin{aligned} 2x - y + 1 &= 0 \\ 2h - 3 + 1 &= 0 \\ 2h &= 2 \\ h &= 1 \end{aligned}$$

จะได้จุดศูนย์กลาง $(1, 3)$
และจากพิกัด $F_1\left(1+2\sqrt{5}, 3\right)$ จะเห็นว่า F_1 อยู่ถัดไปทางขวาของจุดศูนย์กลาง $= 2\sqrt{5}$
จะได้ระยะโฟกัส $c = 2\sqrt{5}$

จากสูตร $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $a^2 + b^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2$
$a^2 + b^2 = 20 \quad \ldots(*)$



อีกสมการของ a กับ b จะใช้ "ความชัน" ของเส้นกำกับมาช่วย
จากรูปจะเห็นว่า เส้นกำกับจะมีความชัน $\frac{b}{a}$ กับ $-\frac{b}{a}$

ซึ่งโจทย์กำหนดให้เส้นกำกับเส้นหนึ่งคือ $2x - y + 1 = 0$

$$2x \qquad +1=y$$

เทียบกับรูป $y=mx+c$ จะได้ความชัน $=2$

เนื่องจาก 2 เป็นบวก จึงสรุปได้ว่า $\frac{b}{a}=2 \rightarrow$ ย้ายข้างได้ $b=2a \rightarrow$ แทนใน $(*)$

จะได้
$$\begin{aligned} a^2+(2a)^2 &= 20 \\ a^2+4a^2 &= 20 \\ 5a^2 &= 20 \\ a^2 &= 4 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

แทน $a=2$ กลับไป จะได้ $b=2(2)$
$=4$

แทนค่า h,k,a,b ในรูปสมการของไฮเพอร์โบลาแนวนอน
$$\begin{aligned} \frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{(x-1)^2}{2^2}-\frac{(y-3)^2}{4^2} &= 1 \\ \frac{x^2-2x+1}{4}-\frac{(y^2-6y+9)}{16} &= 1 \\ \frac{4(x^2-2x+1)-(y^2-6y+9)}{16} &= 1 \\ 4x^2-8x+4-y^2+6y-9 &= 16 \\ 4x^2-y^2-8x+6y &= 21 \end{aligned}$$

เทียบกับ $Ax^2+By^2+Dx+Ey=21$ จะได้ $A=4,\ B=-1,\ D=-8,\ E=6$

ดังนั้น $A^2+B^2+D^2+E^2=4^2+(-1)^2+(-8)^2+6^2$
$=16+1+64+36 \quad =117$

41. ตอบ : 4

วิธีทำ สมการจำนวนเต็ม $\rightarrow$ ต้องจัดรูปให้อยู่ในรูป พหุนาม $=$ จำนวนเต็ม
แยกตัวประกอบพหุนามฝั่งซ้าย แล้วอ้างว่าจำนวนเต็มทางขวาแยกตัวประกอบได้ไม่กี่แบบ

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}-\frac{1}{b} &= \frac{1}{10} \\ 10b-10a &= ab \\ 10b-ab-10a &= 0 \\ b(10-a)-10a &= 0 \\ b(10-a)+100-10a &= 100 \\ b(10-a)+10(10-a) &= 100 \\ (b+10)(10-a) &= 100 \end{aligned}$$

คูณ 10ab ตลอด

เติม 100 ทั้งสองฝั่ง ให้จับกลุ่มดึงตัวร่วมได้

เนื่องจาก b เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น $b+10$ เป็นจำนวนเต็มบวกด้วย

และจะทำให้ $10-a$ ต้องเป็นบวกด้วย เพราะ มันต้องคูณกับจำนวนบวก แล้วได้ จำนวนบวก
และเนื่องจาก a เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น $10-a$ จะเป็นได้แค่ $1,2,3,\ldots,9$ เท่านั้น
จะเห็นว่า 100 ทางขวา สามารถเขียนเป็นผลคูณของสองจำนวน ที่ตัวหลังเป็น $1,2,3,\ldots,9$ ได้แค่ไม่กี่แบบ ดังนี้

b + 10	10 - a	
100	1	$\rightarrow b=90,\ a=9$
50	2	$\rightarrow b=40,\ a=8$
25	4	$\rightarrow b=15,\ a=6$
20	5	$\rightarrow b=10,\ a=5$

มี 4 คำตอบ $\rightarrow$ ดังนั้น S จะมีสมาชิก 4 ตัว

42. ตอบ : 1.5

วิธีทำ

$$\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} < \sqrt{1-x}$$

เปลี่ยนตัวแปร ให้ $\sqrt{1+x}=m$
และ $\sqrt{1-x}=n$

$$\frac{\sqrt{2}x}{m+n} < n$$

เหลือ x ที่เป็นเศษทางฝั่งซ้ายอีกหนึ่งตัว ที่ยังเปลี่ยนตัวแปรไม่ได้
ต้องพยายามจัดรูป x ทางซ้าย ให้อยู่ในรูปของ m และ n

จาก $\sqrt{1+x}=m$ จะได้ $1+x=m^2 \quad \ldots(1)$

จาก $\sqrt{1-x}=n$ จะได้ $1-x=n^2 \quad \ldots(2)$

$(1)-(2):\quad 2x=m^2-n^2$

$$x=\frac{m^2-n^2}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}\left(\frac{m^2-n^2}{2}\right)}{m+n} < n$$

$$\sqrt{2}\cdot\frac{m^2-n^2}{2}\cdot\frac{1}{m+n} < n$$

$$\sqrt{2}\cdot\frac{(m-n)(m+n)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{m+n} < n$$

$$\frac{m-n}{\sqrt{2}} < n$$

$$m-n < \sqrt{2}n$$

$$m < \sqrt{2}n+n$$

$$m < \left(\sqrt{2}+1\right)n$$

แทน m,n กลับไปเป็น x

$$\sqrt{1+x} < \left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{1-x}\right)$$

$$1+x < \left(\sqrt{2}+1\right)^2(1-x)$$

$$1+x < \left(2+2\sqrt{2}+1\right)(1-x)$$

$$1+x < \left(3+2\sqrt{2}\right)(1-x)$$

$$1+x < 3-3x+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}x$$

$$4x+2\sqrt{2}x < 2+2\sqrt{2}$$

$$2x+\sqrt{2}x < 1+\sqrt{2}$$

$$\left(2+\sqrt{2}\right)x < 1+\sqrt{2}$$

$$x < \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \quad \ldots(*)$$

เนื่องจากในรูท ต้อง ≥ 0 ดังนั้น $1+x\geq 0$ และ $1-x\geq 0$

$x \geq -1 \qquad 1 \geq x$

จะได้ $-1\leq x\leq 1$

พิจารณาร่วมกับ $(*)$ สุดท้ายจะได้ $-1 \le x < \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ $\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} < 1\right)$

ดังนั้น ขอบเขตบนน้อยสุด $a = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

ขอบเขตล่างมากสุด $b = -1$

จะได้ $a^2 + b^2 = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^2 + (-1)^2$

$$= \frac{1+2\sqrt{2}+2}{4+4\sqrt{2}+2} + 1$$

$$= \frac{3+2\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}} + 1$$

$$= \frac{3+2\sqrt{2}}{2(3+2\sqrt{2})} + 1$$

$$= \frac{1}{2} + 1 \qquad = 1.5$$

43. ตอบ : 2

วิธีทำ โจทย์ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงบวก → ไม่ต้องระวังเวลา x, y อยู่หลัง log

$$3\log_4 16x^2 = 6 + 6\log_2 \sqrt{y}$$

÷3 ตลอด

$$\log_4 16x^2 = 2 + 2\log_2 \sqrt{y}$$

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

$$\log_4 16 + \log_4 x^2 = 2 + 2\log_2 \sqrt{y}$$

$$2 + \log_{2^2} x^2 = 2 + 2\log_2 y^{\frac{1}{2}}$$

$\log_{a^x} m^y = \frac{y}{x}\log_a m$

$$\frac{2}{2}\log_2 x = \frac{2}{2}\log_2 y$$

$$\log_2 x = \log_2 y$$

$$x = y$$

ถ้าโจทย์ไม่ได้กำหนดให้ x และ y เป็นบวก จะต้องระวังเรื่องค่าหลัง log ต้องเป็นบวก นั่นคือ $\log_4 x^2$ ต้องกลายเป็น $2\log_4|x|$
(y อยู่ในรูท ต้องเป็นบวกอยู่แล้ว)

แทน $x = y$ ใน $\sqrt{2-x} + \sqrt{y} = 2$

$$\sqrt{2-y} = 2 - \sqrt{y}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง ฝั่งขวา เข้าสูตร $(น-ล)^2 = น^2 - 2นล + ล^2$

$$2 - y = 4 - 4\sqrt{y} + y$$

$$4\sqrt{y} = 2 + 2y$$

$$2\sqrt{y} = 1 + y$$

$$0 = y - 2\sqrt{y} + 1$$

$$0 = \sqrt{y}^2 - 2\sqrt{y} + 1$$

$น^2 - 2นล + ล^2 = (น-ล)^2$

$$0 = \left(\sqrt{y} - 1\right)^2$$

$$\sqrt{y} = 1$$

$$y = 1$$

ดังนั้น $x = y = 1 \rightarrow$ ตรวจคำตอบ จะเห็นว่า $\sqrt{2-1}+\sqrt{1} = 2$ **จริง**
จะได้ $x^2 + y^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

หมายเหตุ: ถ้าข้อนี้ โจทย์ไม่ได้กำหนดให้ x เป็นบวก จะได้ $y = |x| \rightarrow y = \pm x$
และจะได้เพิ่มอีกคำตอบ คือ $x = -\frac{1}{4},\ y = \frac{1}{4}$

44. ตอบ : 78.7

วิธีทำ S^2 ของ "กลุ่มตัวอย่าง" หาได้จาก 2 สูตร คือ $\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{N-1}$ และ $\frac{\sum x_i^2 - N\bar{x}^2}{N-1}$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{N-1} = \frac{\sum x_i^2 - N\bar{x}^2}{N-1}$$
$$\frac{34}{5-1} = \frac{214-5\bar{x}^2}{5-1}$$
$$5\bar{x}^2 = 180$$
$$\bar{x}^2 = 36$$
$$\bar{x} = 6$$

$$\text{จะได้ ค่าเฉลี่ยชุดใหม่} = \frac{(x_1+2x_2)+(x_2+2x_3)+(x_3+2x_4)+(x_4+2x_5)+(x_5+2x_1)}{5}$$
$$= \frac{3x_1+3x_2+3x_3+3x_4+3x_5}{5} = 3\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}\right) = 3\bar{x}$$
$$= 3(6)$$
$$= 18$$

และจะหา S^2 ชุดใหม่ โดยใช้สูตร $\frac{\sum x_i^2 - N\bar{x}^2}{N-1}$ ได้

$$= \frac{(x_1+2x_2)^2+(x_2+2x_3)^2+(x_3+2x_4)^2+(x_4+2x_5)^2+(x_5+2x_1)^2-5(18^2)}{5-1}$$
$$= \frac{(x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2)+(x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2)+(x_3^2+4x_3x_4+4x_4^2)+(x_4^2+4x_4x_5+4x_5^2)+(x_5^2+4x_5x_1+4x_1^2)-1620}{4}$$
$$= \frac{5x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+5x_4^2+5x_5^2+4x_1x_2+4x_2x_3+4x_3x_4+4x_4x_5+4x_5x_1-1620}{4}$$
$$= \frac{5(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2)+4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)-1620}{4}$$
โจทย์ให้ $\sum x_i^2 = 214$
$$= \frac{5(214)+4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)-1620}{4}$$
$$= \frac{1070+4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)-1620}{4}$$

$$= \frac{+4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)-550}{4}$$

$$= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1 - 137.5$$

แต่โจทย์ให้ s ของชุดใหม่ $= 16$ ดังนั้น

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1 - 137.5 = 16^2$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1 - 137.5 = 256$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1 = 393.5$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของ $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, x_5x_1 = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1}{5}$

$$= \frac{393.5}{5} = 78.7$$

45. ตอบ : 429

วิธีทำ จำนวนสองหลัก ab จะมีค่า $= 10a + b$

จำนวนสองหลัก ba จะมีค่า $= 10b + a$

ดังนั้น $ab + ba = 143$ จะเขียนใหม่ให้ถูกต้องได้ $(10a+b)+(10b+a) = 143$

$$11a + 11b = 143$$

$$a + b = 13$$

หาร 11 ตลอด

โดยที่ $a,b \in \{1,2,3,\ldots,9\}$ และ $a \neq b \rightarrow$ จะมี a,b ทั้งหมดที่ $a+b=13$

คือ $4+9,\ 5+8,\ 6+7,\ 9+4,\ 8+5,\ 7+6$

ดังนั้น $S = \{49,94,58,85,67,76\}$

จะได้ผลบวก $= 49+94+58+85+67+76$

$= 143+143+143$

$= 429$