IJSO

ข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์
เพื่อคัดเลือกผู้แทนประเทศไทยไปแข่งขัน
วิทยาศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ครั้งที่ 15
The Fifteenth International Junior Science Olympiad: 15th IJSO

ชื่อ-สกุล	**ข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์**
เลขประจำตัวผู้สอบ	**รหัสชุดวิชา 0000001**
สถานที่สอบ	**สอบวันเสาร์ที่ 27 มกราคม 2561**
ห้องสอบ	**เวลา 08.30 – 10.00 น.**

<u>คำชี้แจง</u>

1. ข้อสอบมี 5 หน้า (รวมหน้านี้ด้วย) จำนวน 25 ข้อ
2. ใช้ปากกาเขียน ชื่อ นามสกุล เลขประจำตัวสอบ สถานที่สอบ และ **ใช้ดินสอ 2B** ระบายลงในวงกลมให้ตรงกับเลขประจำตัว และรหัสชุดวิชาที่กรอกในกระดาษคำตอบ
3. ข้อสอบทั้งหมดเป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก
4. **<u>วิธีตอบ</u>** ทำการระบายคำตอบข้อที่ถูกต้องที่สุด ลงในกระดาษคำตอบ**ด้วยดินสอ 2B** ให้นักเรียนพิจารณาเลือกคำตอบที่ถูกต้องและเหมาะสมที่สุดเพียงคำตอบเดียว ถ้าข้อใดตอบมากกว่า 1 ตัวเลือก ข้อนั้นถือเป็นโมฆะ
5. ห้ามนำข้อสอบและกระดาษคำตอบออกจากห้องสอบ
6. ห้ามใช้เครื่องคำนวณ

1. มีจำนวนเต็มบวก m และ n ซึ่ง $m < n$ ทั้งหมดกี่คู่ที่ทำให้
ห.ร.ม. ของ m และ n เท่ากับ 2 และ ค.ร.น. ของ m และ n เท่ากับ 88,200

A. 8 B. 12 C. 16 D. 20

2. สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ กำหนดให้ A_n เป็นค่าของเลขโดดในทศนิยมตำแหน่งที่ n ของ $\frac{26}{133}$
จงหาค่าของ $A_{2018} + A_{2561}$

A. 11 B. 13 C. 15 D. 17

3. ให้ x มีค่ามากกว่า y อยู่ $a\%$ และ y มีค่าน้อยกว่า x อยู่ $b\%$
ถ้า $a - b = 5$ แล้ว $a^2 - b^2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

A. 75 B. 125 C. 175 D. 225

4. จำนวนในข้อใดต่อไปนี้มีค่ามากที่สุด

A. 2^{6521} B. 3^{5126} C. 5^{3621} D. 6^{2531}

5. ถ้า $a = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ แล้ว $a^3 - \frac{39}{a} - \frac{12}{a^2}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

A. 45 B. 46 C. 47 D. 48

6. ให้ $a^3 > b^3$ และ $c^3 > d^3$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริงเสมอ

A. $a^2 + c^2 > b^2 + d^2$ B. $ab + cd > ac + bd$ C. $ac + bd > ad + bc$ D. $ac > bd$

7. ปัจจุบัน พ่อและแม่มีอายุรวมกันเป็น 5 เท่าของอายุลูก
เมื่อ T ปีที่แล้ว พ่อและแม่มีอายุรวมกันเป็น m เท่าของอายุลูก
อีก T ปีข้างหน้า พ่อและแม่มีอายุรวมกันเป็น n เท่าของอายุลูก
ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $m + n$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

A. 11 B. 12 C. 13 D. 14

8. ให้ a เป็นจำนวนจริงที่ทำให้สมการ $ax - y = 1 = ay - x$ มีคำตอบ (x, y) อย่างน้อยสองชุดที่แตกต่างกัน ถ้า (p, q) เป็นคำตอบใด ๆ ของสมการนี้ แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นจริงเสมอ

A. $ap + q = aq + p$ B. $a^2p - q = a^2q - p$ C. $(p + q)^2 = a^2$ D. $(p - q)^2 = a^2$

9. จงหาค่าต่ำสุดที่เป็นไปได้ของ $x^2 + 8x + \frac{1}{x^2} + \frac{8}{x}$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่เท่ากับ 0

A. -18 B. -24 C. -30 D. -32

10. กราฟเส้นตรง $y = ax$ และกราฟเส้นตรง $y = bx$ สัมผัสกราฟ $y = 20x^2 + 18x + 5$ โดยที่ $a > b$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

A. $2a - b = 76$ B. $2a + b = 70$ C. $a - 2b = 46$ D. $a + 2b = 34$

11. ให้ $\mathrm{P}(a, b)$ เป็นจุดในระนาบ XY โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก
เส้นตรงที่ผ่านจุด P ตัดแกน X ที่จุด $\mathrm{Q}(p, 0)$ และตัดแกน Y ที่จุด $\mathrm{R}(0, q)$ โดยที่ $p, q > 0$
ถ้า $\Delta\,\mathrm{PQR}$ มีพื้นที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้เท่ากับ 72 ตารางหน่วย แล้ว $a + b$ มีค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดกี่ค่า

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

12. $\Delta\,\mathrm{PQR}$ มีความยาวด้านทั้งสามเท่ากับความยาวเส้นมัธยฐานทั้งสามของ $\Delta\,\mathrm{ABC}$
ถ้า $\Delta\,\mathrm{PQR}$ มีพื้นที่ 24 ตารางหน่วย แล้ว $\Delta\,\mathrm{ABC}$ จะมีพื้นที่กี่ตารางหน่วย

A. 24 B. 32 C. 40 D. 48

13. วงกลม c_1, c_2, c_3 มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน โดยที่คอร์ดของวงกลม c_3 ที่สัมผัสวงกลม c_2 มีความยาว 42 หน่วย และคอร์ดของวงกลม c_2 ที่สัมผัสวงกลม c_1 มีความยาว 40 หน่วย
จงหาว่าคอร์ดของวงกลม c_3 ที่สัมผัสวงกลม c_1 มีความยาวกี่หน่วย

A. 46 B. 50 C. 54 D. 58

14. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก มี $\mathrm{AC} = 32$ หน่วย และ $\mathrm{BC} = 24$ หน่วย
ให้จุด P อยู่บนด้าน $\overline{\mathrm{AC}}$ และให้ r และ R เป็นรัศมีของวงกลมแนบใน $\Delta\,\mathrm{ABP}$ และ $\Delta\,\mathrm{PBC}$ ตามลำดับ
ถ้า $r : R = 2 : 3$ แล้วจงหาว่า BP เท่ากับกี่หน่วย

A. 30 B. 32 C. 34 D. 36

15. กำหนดให้ ABCDEF เป็นรูปหกเหลี่ยมซึ่ง BCEF เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และ CDE กับ ABF เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว โดยที่ $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ ถ้า $BE = BA + BC$ แล้ว $BC : BA$ เป็นเท่าใด

A. $1:2$ B. $1:3$ C. $2:3$ D. $3:4$

16. เติมน้ำลงในหลอดทดลองรูปทรงกระบอกยาวที่มีรัศมีหน้าตัดเป็น R ให้ได้ระดับน้ำสูงประมาณครึ่งหลอด แล้วเอียงหลอดไป 45° จากแนวดิ่ง พร้อมทั้งทำเครื่องหมายแสดงระดับสูงสุดที่หลอดทดลองเปียกน้ำด้านใน จากนั้นตั้งหลอดทดลองให้ตรงเช่นเดิม แล้วนำทรงกลมเหล็กตันรัศมี r ลูกหนึ่งใส่ลงไปในหลอดทดลอง ทำให้ระดับน้ำสูงขึ้นจนถึงระดับที่ได้ทำเครื่องหมายไว้พอดี จงหาว่า $r^3 : R^3$ เป็นเท่าใด

A. $1:2$ B. $1:3$ C. $2:3$ D. $3:4$

17. ทรงกลมรัศมี r แนบในกรวยกลมตรงที่มีสูงตรงเท่ากับ H และฐานมีรัศมีเท่ากับ R ถ้า $r : R = 3 : 5$ แล้ว $r : H$ เป็นเท่าใด

A. $6:25$ B. $7:25$ C. $8:25$ D. $9:25$

18. ให้ ABCD เป็นพีระมิดฐานสามเหลี่ยมที่มีหน้าทุกหน้าเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ให้ P เป็นจุดบนเส้นขอบ $\overline{AB}$ โดยที่ $AP : PB = 1 : 3$ ถ้า ΔPCD และ ΔACD มีพื้นที่เป็น a และ b ตารางหน่วย ตามลำดับ แล้ว $a^2 : b^2$ เป็นเท่าใด

A. $2:3$ B. $3:4$ C. $4:5$ D. $5:6$

19. กรวยกลมตรงรูปหนึ่งมีพื้นที่ผิวข้างเป็น a เท่าของพื้นที่ฐาน เมื่อตัดกรวยตามแนวสูงเอียง แล้วคลี่ออกจะได้เซกเตอร์ของวงกลมที่มีมุมที่จุดศูนย์กลางเป็น b° ถ้า $b : a = 1 : 10$ แล้ว $b^2 : a$ เป็นเท่าใด

A. $1:5$ B. $2:5$ C. $3:5$ D. $4:5$

20. นำลูกปัดเจาะรูที่เหมือนกันจำนวน 10 ลูกมาร้อยต่อกันโดยไม่เว้นช่องว่าง จะได้เส้นลูกปัดยาว 15 เซนติเมตร สมมติว่ารูที่เจาะของลูกปัดแต่ละลูกเป็นช่องทรงกระบอกที่มีแกนกลางผ่านจุดศูนย์กลางของลูกปัดพอดี จงหาว่าลูกปัดเจาะรูหนึ่งลูกมีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร

A. $\frac{4\pi}{9}$ B. $\frac{9\pi}{16}$ C. $\frac{8\pi}{27}$ D. $\frac{27\pi}{64}$

21. ข้อใดต่อไปนี้มีค่าน้อยที่สุด

A. $\sin 1^\circ + \cos^2 1^\circ$ B. $\sin^2 1^\circ + \cos 1^\circ$ C. $\sin 1^\circ + \cos 1^\circ$ D. $\sec 1^\circ$

22. กำหนดให้ $a = \dfrac{\pi}{360}$ ข้อใดต่อไปนี้ประมาณค่า $\cos 1^\circ$ ได้ใกล้เคียงที่สุด

A. $1 - 2a^2$ B. $1 - 2a$ C. $1 - a^2$ D. $1 - a$

23. ให้ A และ B เป็นมุมแหลมซึ่ง $\dfrac{1}{3} + \sin^2 A = \dfrac{1}{4}\sin^2 B + \dfrac{1}{2}\sin A\,(1 + \cos B)$
ข้อใดต่อไปนี้มีค่าน้อยที่สุด

A. $\sin^2 A$ B. $\sin^2 B$ C. $1 - \sin A$ D. $1 - \sin B$

24. กำหนดให้ $a = \sin 44.5^\circ,\ b = \sin 45.5^\circ$ และ $c = (ab)^2$
จงหาว่า $\left(1 - a^6 - b^6\right)\left(a^8 + b^8 - a^{10} - b^{10}\right)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

A. $3c^2 - 9c^3$ B. $3c^2 - 3c^3$ C. $9c^2 - 3c^3$ D. $9c^2 - 9c^3$

25. ด.ช.ณัฐ ยืนอยู่ขอบหน้าผาริมทะเล และมองเห็นเรือสองลำที่ลอยอยู่ในทะเลห่างจากหน้าผาเป็นระยะทางตามแนวนอน 2 กิโลเมตร และ 3 กิโลเมตร ด้วยมุมก้ม A และ B ตามลำดับ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริงเสมอ

A. $2\sin^2 A < 3\sin^2 B$ B. $3\cos^2 A > 2\cos^2 B$ C. $2A < 3B$ D. $3A > 4B$

∞