เฉลย

1. 3	11. 5	21. 5	31. 32	41. 86
2. 3	12. 2	22. 5	32. 2.5	42. 11.5
3. 4	13. 3	23. 1	33. 1	43. 3
4. 2	14. 4	24. 5	34. 125	44. 3.5
5. 3	15. 1	25. 3	35. 0.5	45. 6
6. 5	16. 1	26. 4	36. 11	
7. 1	17. 4	27. 1	37. 18	
8. 4	18. 2	28. 4	38. 7	
9. 4	19. 2	29. 2	39. 36	
10. 3	20. 1	30. 1	40. 4	

แนวคิด

1. กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ใด ๆ ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์

1. $\sim p \vee (\sim p \wedge q)$
2. $(q \vee \sim q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$
3. $\sim (p \rightarrow \sim q) \rightarrow q$
4. $(\sim p \vee q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
5. $(\sim p \wedge q) \rightarrow (\sim q \wedge p)$

<u>ตอบ 3</u>

ข้อนี้ จะใช้วิธียัดเยียดความเท็จก็ได้ แต่อาจไม่เหมาะกับบางตัวเลือก (เช่น ข้อ 4.) ที่เป็นเท็จได้หลายแบบ เนื่องจากมีตัวแปร p, q แค่ 2 ตัว $\longrightarrow$ จะพยายามจัดรูปแต่ละตัวเลือกให้เป็นรูปอย่างง่ายก่อน

1. $\sim p \vee (\sim p \wedge q)$

$\equiv (\sim p \wedge T) \vee (\sim p \wedge q)$

$\equiv \sim p \wedge (T \vee q)$

$\equiv \sim p \wedge T$

$\equiv \sim p$

เป็นเท็จได้เมื่อ p เป็น T ✗

2. $(q \vee \sim q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$

$\equiv T \wedge (p \rightarrow \sim q)$

$\equiv p \rightarrow \sim q$

เป็นเท็จได้เมื่อ p, q เป็น T ✗

3. $\sim (p \rightarrow \sim q) \rightarrow q \equiv (p \rightarrow \sim q) \vee q$

$\equiv \sim p \vee \sim q \vee q$

$\equiv \sim p \vee T$

$\equiv T$

เป็นจริงเสมอ ✓

4. $(\sim p \vee q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

$\equiv \sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

$\equiv (p \vee \sim p) \wedge \sim q$

$\equiv T \wedge \sim q$

$\equiv \sim q$

เป็นเท็จได้เมื่อ q เป็น T ✗

5. $(\sim p \wedge q) \rightarrow (\sim q \wedge p)$

$\equiv \sim (\sim p \wedge q) \vee (\sim q \wedge p)$

$\equiv p \vee \sim q \vee (\sim q \wedge p)$

$\equiv p \vee (\sim q \wedge T) \vee (\sim q \wedge p)$

$\equiv p \vee (\sim q \wedge (T \vee p))$

$\equiv p \vee (\sim q \wedge T)$

$\equiv p \vee \sim q$

เป็นเท็จได้เมื่อ p เป็น F และ q เป็น T ✗

2. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ คือเซตคำตอบของอสมการ $x2(x2-1)\geq 0$

และให้ $P(x)$ แทน $|x|>1$

$Q(x)$ แทน $x^2-x\geq 2$

$R(x)$ แทน $x<0$

$S(x)$ แทน $1-x<0$

ข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ

1. $\sim\forall x[P(x)]$
2. $\exists x[Q(x)]$
3. $\forall x[Q(x)\rightarrow P(x)]$
4. $\exists x[S(x)\wedge P(x)]$
5. $\forall x[S(x)\rightarrow\sim(P(x)\leftrightarrow R(x))]$

<u>ตอบ 3</u>

แก้สมการเอกภพสัมพัทธ์ $x^2(x^2-1)\geq 0$

$x^2(x-1)(x+1)\geq 0$

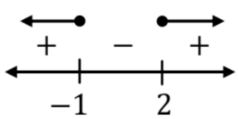
จะได้ $U=(-\infty,-1]\cup\{0\}\cup[1,\infty)$

1. $|x|>1$ จะได้ $x>1$ หรือ $x<-1$ ซึ่งเขียนได้เป็น $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$
   ซึ่งใน U จะมีบางตัวที่ไม่อยู่ในช่วงนี้ (เช่น $x=0$) นั่นคือ จะมีบางตัวที่ทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จ
   ดังนั้น $\forall x[P(x)]$ เป็นเท็จ ทำให้ $\sim\forall x[P(x)]$ เป็น<u>จริง</u>

2. $x^2-x\geq 2$

   $x^2-x-2\geq 0$

   $(x-2)(x+1)\geq 0$



จะได้คำตอบของ $Q(x)$ คือ $(-\infty,-1]\cup[2,\infty)$ ซึ่งมีบางตัว (เช่น -1) อยู่ใน U
ดังนั้น $\exists x[Q(x)]$ เป็นจริง

3. ใช้คำตอบของ $P(x)$ และ $Q(x)$ ที่เคยแก้ มาแทน จะได้

   $Q(x)\rightarrow P(x)\equiv x\in(-\infty,-1]\cup[2,\infty)\rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

   ซึ่งจะเป็นเท็จเมื่อ $x=-1$ ดังนั้น $\forall x[Q(x)\rightarrow P(x)]$ เป็น<u>เท็จ</u>

4. $1-x<0$ จะได้คำตอบของ $S(x)$ คือ $(1,\infty)$

   $1<x$

5. ต้องหาว่ามี x ที่ทำให้ $S(x)$ เป็นจริง และทำให้ $\sim\big(P(x)\leftrightarrow R(x)\big)$ เป็นเท็จ

$S(x)$ เป็นจริงเมื่อ $x\in(1,\ \infty)$ ซึ่งในช่วงนี้จะทำให้ $P(x)$ เป็นจริง และ $R(x)$ เป็นเท็จ เสมอ

(คำตอบของ $P(x)$ คือ $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ และ คำตอบของ $R(x)$ คือ $(-\infty,\ 0)$)

จะได้ $\sim(P(x)\leftrightarrow R(x))\equiv\sim(T\leftrightarrow F)\equiv\sim F\equiv T$ ไม่เป็นเท็จ

ดังนั้น $S(x)\rightarrow\sim\big(P(x)\leftrightarrow R(x)\big)$ จะเป็นเท็จไม่ได้ $\longrightarrow$ ข้อ 5. เป็น<u>จริง</u>

3. เซตคำตอบของอสมการ $\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+x^2+x-13\right)<x$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-5,\ 0)$ 2. $(-4,\ 1)$ 3. $(-3,\ 2)$ 4. $(-2,\ 4)$ 5. $(-1,\ 5)$

<u>ตอบ 4</u>

พยายามกำจัดรูทก่อน

สังเกตว่า ถ้าเอา $\sqrt{1+x}+1$ ไปคูณกับคอนจูเกตของมัน จะได้

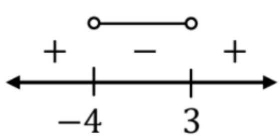
$$\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)=1+x-1$$
$$=x$$

ดังนั้น เราสามารถเปลี่ยน x ทางขวาของอสมการ โจทย์เป็น $\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)$ เพื่อตัดกับฝั่งซ้ายได้

$$\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+x^2+x-13\right)<x$$
$$\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+x^2+x-13\right)<\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)$$
$$\sqrt{1+x}+x^2+x-13<\sqrt{1+x}-1$$

$\sqrt{1+x}+1$ เป็นบวก $\longrightarrow$ ตัดแล้วไม่ต้องกลับมากกว่า น้อยกว่า

$$x^2+x-12<0$$
$$(x+4)(x-3)<0$$



จะได้ $x\in(-4,3)$

และในรูท ต้องไม่ติดลบ $\longrightarrow$ $1+x\geq 0$ $\longrightarrow$ พิจารณาร่วมกับ $(-4,3)$ จะเหลือคำตอบสุดท้ายคือ $(-1,3)$

$x\geq -1$ ซึ่งจะเป็นสับเซตของ $(-2,4)$ ในข้อ 4.

4. ค่าของ $\sin\left(4\arctan\frac{1}{3}\right)\tan\left(2\arctan\frac{1}{7}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{5}{24}$ 2. $\frac{7}{25}$ 3. $\frac{7}{24}$ 4. $\frac{12}{25}$ 5. $\frac{13}{25}$

<u>**ตอบ 2**</u>

มุมเป็น arctan $\longrightarrow$ จะใช้สูตร $\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

$$\sin\left(4\arctan\frac{1}{3}\right) = \sin\left(2\left(2\arctan\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{2\tan\left(2\arctan\frac{1}{3}\right)}{1+\tan^2\left(2\arctan\frac{1}{3}\right)} \qquad ...(*)$$

หา $2\tan\left(2\arctan\frac{1}{3}\right)$ ไปแทนใน (*) :

$$\tan\left(2\arctan\frac{1}{3}\right) = \frac{2\tan\left(\arctan\frac{1}{3}\right)}{1-\tan^2\left(\arctan\frac{1}{3}\right)} = \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8} = \frac{3}{4}$$

แทนใน (*) จะได้ $\sin\left(4\arctan\frac{1}{3}\right) = \frac{2\left(\frac{3}{4}\right)}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{16}{25} = \frac{24}{25}$ ....(1)

และที่เหลือ $\tan\left(2\arctan\frac{1}{7}\right) = \frac{2\tan\left(\arctan\frac{1}{7}\right)}{1-\tan^2\left(\arctan\frac{1}{7}\right)} = \frac{2\left(\frac{1}{7}\right)}{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{2}{7}\cdot\frac{49}{48} = \frac{7}{24}$ ...(2)

แทน (1) และ (2) ในโจทย์ จะได้ $\sin\left(4\arctan\frac{1}{3}\right)\tan\left(2\arctan\frac{1}{7}\right) = \frac{24}{25}\cdot\frac{7}{24} = \frac{7}{25}$

5. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และให้ $r_1 = \left\{(x,\ y)\in R \times R \mid y = \sqrt{3-x} + \sqrt{2+x}\right\}$

$$r_2 = \{(x,\ y) \in R \times R \ \| y| = |x| + 1\}$$

ถ้า A เป็นโดเมนของ r_1 และ B เป็นเรนจ์ของ r_2 แล้ว $A - B$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\infty, -1]$ 2. $(-2,\ 0]$ 3. $(-1,\ 1]$ 4. $(0,\ 2]$ 5. $(1,\ \infty)$

ตอบ 3

หาโดเมนของ r_1 $\longrightarrow$ ในรูทห้ามติดลบ จะได้ $3 - x \geq 0$ และ $2 + x \geq 0$

$3 \geq x$ $\quad$ $x \geq -2$

จะได้ $A = [-2, 3]$

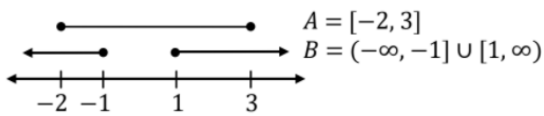
หาเรนจ์ของ $r_2 \longrightarrow$ พิจารณาช่วงค่าของ $|x|$ แล้วจัดรูปให้เป็น y : $|x| \geq 0$

+1 ตลอด

$|x| + 1 \geq 1$

$|y| = |x| + 1$

$|y| \geq 1$



$y \geq 1$ หรือ $y \leq -1$

จะได้ $B = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
ดังนั้น $A - B = (-1,\ 1)$
ซึ่งจะเป็นสับเซตของ $(-1,\ 1]$ ใน**ข้อ 3.**

6. ถ้า $A = \arctan\left(\dfrac{2\sin 130^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 290^\circ}\right)$ แล้ว $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + A\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - A\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 2. $-\dfrac{1}{2}$ 3. 0 4. $\dfrac{1}{2}$ 5. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ตอบ 5

$$\frac{2\sin 130^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 290^\circ}$$

เปลี่ยนมุมให้เป็น Q1

$$= \frac{2\sin 50^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 70^\circ}$$

โคฟังก์ชัน

$$= \frac{\sin 50^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{\sin 50^\circ + 2\cos\left(\frac{50^\circ + 70^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{50^\circ - 70^\circ}{2}\right)}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{\sin 50^\circ + 2\cos 60^\circ \sin\left(-10^\circ\right)}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{\sin 50^\circ - \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{50^\circ + 10^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{50^\circ - 10^\circ}{2}\right)}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{2\cos 30^\circ \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

ดังนั้น $A = \arctan\sqrt{3} = 60^\circ$

จะได้ $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + A\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - A\right) = \sin\left(30^\circ + 60^\circ\right)\cos\left(30^\circ - 60^\circ\right)$

$$= \sin\left(90^\circ\right)\cos\left(-30^\circ\right)$$

$$= 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

7. ถ้า $0 < A, B < \frac{\pi}{2}$ สอดคล้องกับ $(1+\tan A)(1+\tan B) = 2$

แล้วค่าของ $\tan^2\left(\frac{A+B}{2}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $3-2\sqrt{2}$ 2. $3+2\sqrt{2}$ 3. $5-2\sqrt{2}$ 4. $1+\sqrt{2}$ 5. $1+2\sqrt{2}$

<u>ตอบ 1</u>

$$(1+\tan A)(1+\tan B) = 2$$
$$1+\tan A+\tan B+\tan A\tan B = 2$$
$$\tan A+\tan B = 1-\tan A\tan B \quad ...(*)$$

แทนในสูตร $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

$$= \frac{1-\tan A\tan B}{1-\tan A\tan B} \quad \text{จาก } (*)$$
$$= 1$$

เนื่องจาก $0 < A, B < \frac{\pi}{2}$
ดังนั้น $\tan A + \tan B > 0$
ทั้งสองฝั่งของ $(*)$ จึง $\neq 0$

จะได้ $A+B = 45^\circ$ (เนื่องจาก $0 < A,\ B < \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $0 < A+B < \pi$)

จากสูตร $\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ จะได้ $\tan^2\left(\dfrac{A+B}{2}\right) = \tan^2\left(\dfrac{45^\circ}{2}\right) = \left(\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}}\right)^2$

$$= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$$
$$= \frac{2-2\sqrt{2}+1}{2-1} = 3-2\sqrt{2}$$

8. ให้ E เป็นวงรีรูปหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(1, -2)$ และโฟกัสทั้งสองอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน x ถ้า $(4,0)$ เป็นจุดบน E และผลบวกของระยะทางจากจุด $(4,0)$ ไปยังจุดโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 8 หน่วย แล้ววงรี E ผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้

1. $(4, 2)$ 2. $(2, 4)$ 3. $(2, -4)$ 4. $(-2, -4)$ 5. $(4, -2)$

ตอบ 4

โฟกัสอยู่บนเส้นตรงที่ขนานแกน x $\longrightarrow$ เป็นวงรีแนวนอน จะได้รูปสมการคือ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ...(1)

ผลบวกระยะจากจุดบนวงรีไปยังโฟกัสทั้งสอง จะเท่ากับความยาวแกนเอก (2a) $\longrightarrow$ ดังนั้น $2a = 8$

$a = 4$

จุดศูนย์กลาง $(h, k)=(1,-2)\longrightarrow$ แทน h, k และ a ใน (1) จะได้ $\frac{(x-1)^2}{4^2}+\frac{(y-(2))^2}{b^2}=1$

$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{b^2}=1 \quad ...(2)$$

ผ่านจุด $(4,0)$ แสดงว่า $x=4,\ y=0$ ต้องทำให้สมการวงรีเป็นจริง $\longrightarrow \frac{(4-1)^2}{4^2}+\frac{(0-2)^2}{b^2}=1$

$$\frac{9}{16}+\frac{4}{b^2}=1$$

$$\frac{4}{b^2}=\frac{7}{16}$$

$$\frac{64}{7}=b^2$$

แทน b^2 ใน (2) จะได้สมการวงรีคือ $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{\frac{64}{7}}=1$

$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{7(y+2)^2}{64}=1$$

ไล่แทนค่าในแต่ละตัวเลือก แล้วดูว่าตัวเลือกไหนทำให้สมการวงรีเป็นจริง

1. $\frac{(4-1)^2}{16}+\frac{7(2+2)^2}{64}=1$

$\frac{9}{16}+\frac{7}{4}=1$ ✗

2. $\frac{(2-1)^2}{16}+\frac{7(4+2)^2}{64}=1$

$\frac{1}{16}+\frac{63}{16}=1$ ✗

3. $\frac{(2-1)^2}{16}+\frac{7(-4+2)^2}{64}=1$

$\frac{1}{16}+\frac{7}{16}=1$ ✗

4. $\frac{(-2-1)^2}{16}+\frac{7(-4+2)^2}{64}=1$

$\frac{9}{16}+\frac{7}{16}=1$ ✓

5. $\frac{(4-1)^2}{16}+\frac{7(-2+2)^2}{64}=1$

$\frac{9}{16}+0=1$ ✗

9. ให้ a เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับอสมการ $\log_3(5(6^a)-2^{2a+1})>2a+1$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $2a+1>0$
2. $|a|>1$
3. $2^a>1$
4. $1<|a-1|<2$
5. $2^{a+1}<1$

<u>ตอบ 4</u>

$$\log_3\left(5\left(6^a\right)-2^{2a+1}\right)>2a+1$$

$$5(6)^a-2^{2a+1}>3^{2a+1}$$

$$5(2\cdot 3)^a-2^{2a}\cdot 2^1>3^{2a}\cdot 3^1$$

$$5(2^a\cdot 3^a)-2(2^a)^2>3(3^a)^2$$

$$5(A\cdot B)-2A^2>3B^2$$

$$0>3B^2-5AB+2A^2$$

$$0>(3B-2A)(B-A)$$

$$0>\left(3\left(3^a\right)-2\left(2^a\right)\right)\left(3^a-2^a\right)$$

$$0>\left(3^{a+1}-2^{a+1}\right)\left(3^a-2^a\right)$$

หาจุดที่ทำให้แต่ละวงเล็บเป็น 0 $3^{a+1}-2^{a+1}=0$ $\quad$ $3^a-2^a=0$

$3^{a+1}=2^{a+1}$ $\quad$ $3^a=2^a$

แล้วพล็อตลงบนเส้นจำนวน $a+1=0$ $\quad$ $a=0$

$a=-1$

พิจารณาเครื่องหมาย ตามช่วง จะได้

$3^{a+1}-2^{a+1}$	$-$	$+$	$+$
$3^{a}-2^{a}$	$-$	$-$	$+$
$\left(3^{a+1}-2^{a+1}\right)\left(3^{a}-2^{a}\right)$	$+$	$-$	$+$
		-1	0

$\rightarrow a\in(-1,0)$

และหลัง log ต้องเป็นบวก แต่จากการแก้อสมการ $\log_3\left(5\left(6^a\right)-2^{2a+1}\right)>2a+1$

$$5(6)^a-2^{2a+1}>3^{2a+1}$$ >0 อยู่แล้ว

จะได้คำตอบของอสมการคือ $a\in(-1,0)$

ลองแทนค่า $a\in(-1,0)$ แล้วค่อยๆ ตัดตัวเลือกที่ไม่จริงออก $\longrightarrow$ แทน $a=-0.5$

1. $2(-0.5)+1>0$

$0>0$ ✗

2. $|-0.5|>1$

$0.5>1$ ✗

3. $2^{-0.5}>1$

$\frac{1}{\sqrt{2}}>1$

$1>\sqrt{2}$ ✗

4. $1<|-0.5-1|<2$

$1<\ 1.5\ <2$ ✓

5. $2^{-0.5+1}<1$

$\sqrt{2}<1$ ✗

10. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ a & b\end{bmatrix}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

ถ้า $(A-B)B=B(A-B)$ แล้วค่าของ $\det(A+B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{3}{2}$ 2. $-\frac{1}{2}$ 3. $\frac{5}{2}$ 4. $\frac{7}{2}$ 5. $\frac{13}{2}$

ตอบ 3

$$AB-B^2=BA-B^2$$

$$AB=BA$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 1\\ a & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ a & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-3+2a & 1+2b\\ 3+3a & -1+3b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -3\\ a-b & 2a+3b\end{bmatrix}$$

เทียบสมาชิกแต่ละตำแหน่ง ⟶ จะเห็นว่าเทียบแถวที่ 1 ก็แก้หา a , b ได้แล้ว

$$-3+2a=-4 \qquad\qquad 1+2b=-3$$
$$a=-0.5 \qquad\qquad b=-2$$

จะเห็นว่า a , b ที่ได้ ทำให้สมาชิกที่เหลือในแถวที่ 2 ตรงกัน

$$3+3a=a-b \qquad\qquad -1+3b=2a+3b$$
$$3+3(-0.5)=(-0.5)-(-2) \qquad\qquad -1+3(-2)=2(-0.5)+3(-2)$$
$$1.5=1.5 \checkmark \qquad\qquad -7=-7 \checkmark$$

แทนค่า a , b จะได้ B ⟶ ดังนั้น $A+B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -0.5 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -1.5 & 1\end{bmatrix}$

จะได้ $\det(A+B)=(-2)(1)-(-1.5)(3)=2.5=\frac{5}{2}$

11. กำหนดให้เวกเตอร์ $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$ ถ้า $\bar{b}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ โดยที่ $(\bar{b}+\bar{a})\cdot(\bar{b}-\bar{a})=10$ และเวกเตอร์ $\bar{a}$ ทำมุม 60° กับเวกเตอร์ $\bar{b}$ แล้วขนาดของเวกเตอร์ $\bar{a}\times\bar{b}$ อยู่ในช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. (0,2] 2. (2,4] 3. (4,6] 4. (6,8] 5. (8,10]

<u>**ตอบ 5**</u>

$$(\bar{b}+\bar{a})\cdot(\bar{b}-\bar{a})=10$$
$$\bar{b}\cdot\bar{b}-\bar{b}\cdot\bar{a}+\bar{a}\cdot\bar{b}-\bar{a}\cdot\bar{a}=10$$
$$\bar{b}\cdot\bar{b}-\bar{a}\cdot\bar{a}=10$$

$$\boxed{\bar{u}\cdot\bar{u}=|\bar{u}|^2}$$

$$|\bar{b}|^2-|\bar{a}|^2=10$$

จาก $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$

จะได้ $|\bar{a}|=\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$

$$|\bar{b}|^2-(\sqrt{6})^2=10$$
$$|\bar{b}|^2=16$$
$$|\bar{b}|=4$$

จากสูตร $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin\theta$

$$=\left(\sqrt{6}\right)(4)\sin 60^\circ=\left(\sqrt{6}\right)(4)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=6\sqrt{2}\approx 6(1.4)=8.4\in(8,10]$$ ในข้อ 5.

12. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก และให้ $P=ax+by$ เป็นฟังก์ชันจุดประสงค์ ภายใต้อสมการข้อจำกัดต่อไปนี้

$$x+2y\le 12$$
$$x+y\ge 6$$
$$x-2y\ge 0$$
$$x\ge 0 \text{ และ } y\ge 0$$

ถ้า P มีค่ามากที่สุด ที่จุด A และ B โดยที่จุด A และจุด B เป็นจุดสองจุดที่ต่างกันอยู่บนเส้นตรง $x+2y=12$ และเป็นจุดมุมที่สอดคล้องกับอสมการที่กำหนดให้ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $b=a$ 2. $b=2a$ 3. $b=3a$ 4. $b=4a$ 5. $b=5a$

<u>ตอบ 2</u>

สมมติให้พิกัด A และ B คือ (x_1,y_1) และ (x_2,y_2)

$P=ax+by$ มีค่ามากสุด ที่ A และ B เท่ากัน จะได้ว่า

$$ax_1+by_1=ax_2+by_2$$
$$ax_1-ax_2=by_2-by_1$$
$$a(x_1-x_2)=b(y_2-y_1) \quad .....(*)$$

โจทย์ให้ A และ B อยู่บน $x+2y=12$ ดังนั้น $x_1+2y_1=12 \quad ...(1)$

$$x_2+2y_2=12 \quad ...(2)$$
$$(1)-(2):\quad x_1-x_2+2y_1-2y_2=0$$
$$x_1-x_2=2y_2-2y_1$$
$$x_1-x_2=2(y_2-y_1)$$

แทนค่า ใน (*) จะได้ $a(2)(y_2-y_1)=b(y_2-y_1)$

$$2a=b$$

จุดที่ต่างกันบนเส้นตรง จะมี $y_1\ne y_2$ ทำให้หารตลอดด้วย y_2-y_1 ได้

13. กำหนดให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่าง และ P(E) แทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E และ E' แทนคอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ E ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใน S โดยที่ $P(A\cup B)=0.8$ และ $P(A\cap B)=0.4$ แล้วค่าของ $P(A')+P(B')$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.4 2. 0.6 3. 0.8 4. 1.2 5. 1.6

ตอบ 3

จากสมบัติของความน่าจะเป็น จะได้ $P(A')=1-P(A)$

$P(B')=1-P(B)$

ดังนั้น $P(A')+P(B)'=1-P(A)+1-P(B)$

$=2-\left(P(A)+P(B)\right)$ ...(*)

จากสูตร Inclusive – Exclusive จะได้ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$0.8=P(A)+P(B)-0.4$

$1.2=P(A)+P(B)$

แทนใน (*) จะได้ $P(A')+P(B')=2-1.2=0.8$

14. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^{\sqrt{x}}x^2-2^{3+\sqrt{x}}\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 32 2. 64 3. 80 4. 96 5. 128

ตอบ 4

$$\lim_{x\to 4}\frac{2^{\sqrt{x}}x^2-2^{3+\sqrt{x}}\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{2^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}^2\right)^2-2^3 2^{\sqrt{x}}\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2^{\sqrt{x}}\sqrt{x}^4-2^3 2^{\sqrt{x}}\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

ดึงตัวร่วม $2^{\sqrt{x}}\sqrt{x}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2^{\sqrt{x}}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}^3-2^3\right)}{\sqrt{x}-2}$$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2^{\sqrt{x}}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}^2+2\sqrt{x}+2^2\right)}{\sqrt{x}-2}$$

$$=\lim_{x\to 4}2^{\sqrt{x}}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}^2+2\sqrt{x}+2^2\right)$$

$$=2^{\sqrt{4}}\sqrt{4}\left(\sqrt{4}^2+2\sqrt{4}+2^2\right)\quad =8(4+4+4)=96$$

15. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง โดยที่ $f'(x) = 2ax + b\sqrt{x} + 1$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $f(0) = 1$ และ $f'(1) = f'(4) = 0$ แล้ว $(f \circ f)(4)$ มีค่าเท่ากับข้อ ใดต่อไปนี้

1. 1.25 2. 1.75 3. 2.25 4. 2.75 5. 3.25

<u>ตอบ 1</u>

จาก $f'(1) = 0$

$$2a(1) + b\sqrt{1} + 1 = 0$$

$$a + b + 1 = 0 \qquad \ldots(1)$$

$f'(4) = 0$

$$2a(4) + b\sqrt{4} + 1 = 0$$

$$8a + 2b + 1 = 0 \qquad \ldots(2)$$

กำจัด $a \longrightarrow 4 \times (1) - (2)$: $(8a + 4b + 4) - (8a + 2b + 1) = 0$

$$2b + 3 = 0$$

$$b = -\frac{3}{2}$$

แทน b ใน (1) : $2a + \left(-\frac{3}{2}\right) + 1 = 0$

$$2a = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{4}$$

แทนค่า a, b ใน $f(x)$ จะได้ $f'(x) = 2\left(\frac{1}{4}\right)x - \frac{3}{2}\sqrt{x} + 1 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 1$

อินทิเกรต จะได้ $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x^{\frac{3}{2}} + x + c$

และจาก $f(0) = 1$

$$\frac{1}{4}\left(0^2\right) - 0^{\frac{3}{2}} + 0 + c = 1$$

$$c = 1$$

จะได้ $f(x)=\frac{1}{4}x^2-x^{\frac{3}{2}}+x+1$

ดังนั้น $(f\circ f)(4)=f(f(4))=f\left(\frac{1}{4}\left(4^2\right)-4^{\frac{3}{2}}+4+1\right)$

$=f(4-8+4+1)$

$=f\ (1)$

$=\frac{1}{4}\left(1^2\right)-1^{\frac{3}{2}}+1+1$

$=0.25-1+1+1\quad =1.25$

16. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยมีความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 60 หน่วย ถ้าความยาวของด้านตรงข้ามมุม A และมุม B เท่ากับ a หน่วย และ b หน่วย ตามลำดับ แล้วค่าของ $a\sin^2\left(\frac{A+C}{2}\right)+b\sin^2\left(\frac{B+C}{2}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 30 2. $30+a$ 3. 60 4. $60+a+b$ 5. 150

<u>ตอบ 1</u>

$a\sin^2\left(\frac{A+C}{2}\right)+b\sin^2\left(\frac{B+C}{2}\right)$ $\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

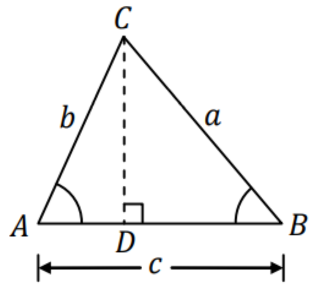
$=a\cdot\frac{1-\cos(A+C)}{2}+b\cdot\frac{1-\cos(B+C)}{2}$ $\cos\left(180^\circ-\theta\right)=-\cos\theta$

$=a\cdot\frac{1+\cos\left(180^\circ-(A+C)\right)}{2}+b\cdot\frac{1+\cos\left(180^\circ-(B+C)\right)}{2}$

$=a\cdot\frac{1+\cos B}{2}+b\cdot\frac{1+\cos A}{2}$ มุมในสามเหลี่ยม $A+B+C=180^\circ$

$=\frac{a+a\cos B+b+b\cos A}{2}$ ...(*)

พิจารณา $\triangle ABC$ ลาก $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ดังรูป



ใน $\triangle ACD$ จะได้ $AD = b\cos A$

ใน $\triangle BCD$ จะได้ $DB = a\cos B$

ดังนั้น $AD + DB = b\cos A + a\cos B$

$c = b\cos A + a\cos B$

แทนใน (*) จะได้ $\dfrac{a + a\cos B + b + b\cos A}{2} = \dfrac{a+b+c}{2}$

$= \dfrac{60}{2} = 30$

โจทย์ให้เส้นรอบรูป = 60

17. ให้จุด A เป็นจุดบนเส้นตรง $3x + y + 4 = 0$ โดยที่จุด A ห่างจากจุด $(-5, 6)$ และจุด $(3, 2)$ เป็นระยะเท่ากัน ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงสองเส้นที่ต่างกันและขนานกับเส้นตรง $5x + 12y = 0$ ถ้าจุด A อยู่ห่างจากเส้นตรง L_1 และ L_2 เป็นระยะเท่ากับ 2 หน่วย แล้วผลบวกของระยะตัดแกน x ของเส้นตรง L_1 และ L_2 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -5.6 2. -2.8 3. 2.8 4. 5.6 5. 8.4

ตอบ 4

ให้พิกัดของ A คือ (a, b) โจทย์ให้ A อยู่บนเส้นตรง $3x + y + 4 = 0$

ดังนั้น $3a + b + 4 = 0 \quad ...(1)$

ห่างจาก$(-5, 6)$ และ $(3, 2)$เท่ากัน$\longrightarrow$

$$\sqrt{(a-(-5))^2 + (b-6)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (b-2)^2}$$

$$(a+5)^2 + (b-6)^2 = (a-3)^2 + (b-2)^2$$

$$(a+5)^2 - (a-3)^2 = (b-2)^2 - (b-6)^2$$

$$(8)(2a+2) = (4)(2b-8)$$

$$2a + 2 = b - 4$$

$$2a - b + 6 = 0 \qquad ...(2)$$

$$(1)+(2)\ :\ 5a+10=0$$

$$a=-2$$

แทนค่า a ใน (2) : $2(-2)-b+6=0$

$2=b\longrightarrow$ จะได้พิกัด A คือ $(-2,2)$

$L_1,\ L_2$ ขนานกับ $5x+12y=0\ \longrightarrow\ L_1,\ L_2$ ต้องอยู่ในรูป $5x+12y+C=0$

$A(-2,2)$ ห่างจาก $L_1,\ L_2$ เป็นระยะ 2 หน่วย $\longrightarrow\ \dfrac{|5(-2)+12(2)+C|}{\sqrt{5^2+12^2}}=2$

$$\frac{|14+C|}{13}=2$$

$$|14+C|=26$$

$$14+C=26,-26$$

$$C=12,-40$$

จะได้ $L_1,\ L_2$ คือ $5x+12y+12=0$ และ $5x+12y-40=0$

หาระยะตัดแกน x ต้องแทน $y=0\longrightarrow\ 5x+12(0)+12=0$ $\qquad 5x+12(0)-40=0$

$$x=-\frac{12}{5} \qquad\qquad x=8$$

จะได้ผลบวกระยะตัดแกน x คือ $-\dfrac{12}{5}+8=-2.4+8=5.6$

18. ให้ $z_1 = \dfrac{1+7i}{(2-i)^2}$ และ $z_2 = \dfrac{1+3i}{1-2i}$ เมื่อ $i^2 = -1$

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง ที่สอดคล้องกับ $\left|az_1 + b\overline{z_2}\right| = 2$ แล้วค่าของ $a^2 + b^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 2 3. 4 4. 8 5. 12

<u>ตอบ 2</u>

จัดรูป z_1, z_2:

$$z_1 = \frac{1+7i}{(2-i)^2} = \frac{1+7i}{4-4i+i^2} = \frac{1+7i}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i} = \frac{3+25i+28i^2}{9-16i^2} = \frac{-25+25i}{25} = -1+i$$

$$z_2 = \frac{1+3i}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i} = \frac{1+5i+6i^2}{1-4i^2} = \frac{-5+5i}{5} = -1+i$$

แทนใน $\left|az_1 + b\overline{z_2}\right| = 2$

$$\left|a(-1+i) + b\overline{(-1+i)}\right| = 2$$

$$\left|a(-1+i) + b(-1+i)\right| = 2$$

$$\left|-a+ai-b-bi\right| = 2$$

$$\left|(-a-b)+(a-b)i\right| = 2$$

$$\sqrt{(-a-b)^2+(a-b)^2} = 2$$

$$a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2 = 4$$

$$2a^2+2b^2 = 4$$

$$a^2+b^2 = 2$$

19. จากการสำรวจรายได้และรายจ่ายของพนักงานบริษัทแห่งหนึ่ง จำนวน 8 คน ดังนี้

พนักงานคนที่	1	2	3	4	5	6	7	8
รายได้ (x) (หน่วยหมื่นบาท)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
รายจ่าย (y) (หน่วยหมื่นบาท)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8

ปรากฏว่ารายได้ - 13.5

ถ้า $\sum_{i=1}^{8} y_i = 492$ และ $\sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 3432$ แล้วความแปรปรวนของรายได้ของพนักงาน 8 คนนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 6.5 2. 7.5 3. 8.5 4. 9.5 5. 10.5

<u>**ตอบ 2**</u>

จากความสัมพันธ์ $y = 8x + 13.5$ จะได้ $b = 8$ และ $a = 13.5$

มีพนักงาน 8 คน $\longrightarrow n = 8$

แทนข้อมูลทั้งหมดในสูตรระบบสมการ

$$\sum y = an + b\sum x \qquad \text{จะได้} \qquad 492 = (13.5)(8) + 8\sum x \quad ...(1)$$

$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 \qquad 3432 = (13.5)\sum x + 8\sum x^2 \quad ...(2)$$

จาก (1) : $492 = 108 + 8\sum x$

$$384 = 8\sum x$$

$$48 = \sum x$$

จาก (2) : $3432 = (13.5)(48) + 8\sum x^2$

$$429 = (135.)(6) + \sum x^2$$

$$429 = 81 + \sum x^2$$

$$348 = \sum x^2$$

จากสูตรความแปรปรวน จะได้

$$S^2_{\text{รายได้}} = \frac{\sum x^2}{N} - \left(\frac{\sum x}{N}\right)^2 = \frac{348}{8} - \left(\frac{48}{8}\right)^2 = 43.5 - 36 = 7.5$$

20. กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐานระหว่าง 0 ถึง z ดังนี้

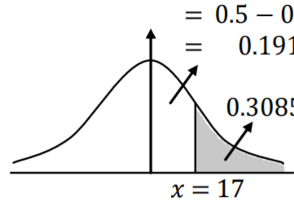
z	0.35	0.5	0.85	1.00	1.20
พื้นที่ใต้เส้นโค้ง	0.1368	0.1915	0.3023	0.3413	0.3849

จากการสอบถามอายุของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลายของโรงเรียนแห่งหนึ่ง พบว่าอายุของนักเรียนมีการแจกแจงปกติ มีนักเรียนร้อยละ 30.85 ที่มีอายุมากกว่า 17 ปี และมีนักเรียนร้อยละ 53.28 ที่มีอายุตั้งแต่ 14 ปี แต่ไม่เกิน 17 ปีแล้วสัมประสิทธิ์การแปรผันของอายุนักเรียนกลุ่มนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.125 2. 1.25 3. 4.0 4. 8.0 5. 12.5

ตอบ 1

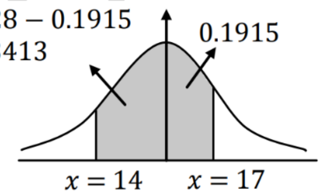
มากกว่า 17 ปีคิดเป็น 30.85% = พื้นที่ 0.3085 ที่แรเงาทางขวา ดังรูป
แต่พื้นที่ที่ใช้เปิดตาราง คือพื้นที่ที่วัดจากแกนกลาง
ครึ่งขวาทั้งหมด = 0.5 ⟶ พื้นที่ที่ใช้เปิดตาราง = 0.5 – 0.3085
= 0.1915



จากตาราง เมื่อพื้นที่ = 0.1915 จะได้ z = 0.5

จากสูตร $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ จะได้ $0.5 = \frac{17 - \bar{x}}{s}$ ....(1)

14 ปี ถึง 17 ปี คิดเป็น 53.28% = พื้นที่ 0.5328 ที่แรเงา
0.5328 มากกว่า 0.1915 อยู่ 0.3413 ⟶ จะล้นมาทางซ้ายดังรูป
นับจากแกนกลาง จะได้พื้นที่ที่ใช้เปิดตาราง = 0.3413 ⟶ $z = 1$
แต่เป็นพื้นที่ฝั่งซ้าย z ต้องติดลบ จะได้ $z = -1$ จะได้ $-1 = \frac{14 - \bar{x}}{s}$



(2) ÷ (1) : $\frac{-1}{0.5} = \frac{14 - \bar{x}}{s} \cdot \frac{s}{17 - \bar{x}}$

$-2 = \frac{14 - \bar{x}}{17 - \bar{x}}$

$-34 + 2\bar{x} = 14 - \bar{x}$

$3\bar{x} = 48$

$\bar{x} = 16$

แทนใน $\bar{x}$ ใน (2) : $-1 = \frac{14 - 16}{s}$

$-s = -2$

$s = 2$

จะได้สัมประสิทธิ์การแปรผัน = $= \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} = 0.125$

21. กำหนดข้อมูล x_1, x_2, x_3, x_4 โดยที่ $0 < x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$ ถ้าข้อมูลชุดนี้มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 7 พิสัยเท่ากับ 9 และ มัธยฐานและฐานนิยมมีค่าเท่ากัน และมีค่าเท่ากับ 6 แล้วสัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ของข้อมูลชุดนี้ เท่ากับข้อใด

ต่อไปนี้

1. $\frac{3}{19}$ 2. $\frac{5}{19}$ 3. $\frac{6}{19}$ 4. $\frac{7}{20}$ 5. $\frac{9}{20}$

__ตอบ 5__

มัธยฐาน = ฐานนิยม = 6 แสดงว่า 6 เป็นตัวตรงกลางที่ซ้ำมากสุด ⟶ จะได้ข้อมูลต้องอยู่ในรูป $x_1, 6, 6, x_4$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 7 ⟶ จะได้ $\frac{x_1+6+6+x_4}{4} = 7$

$$x_1 + 12 + x_4 = 28$$

$$x_1 + x_4 = 16 \qquad ...(1)$$

พิสัย = 9 ⟶ จะได้ $x_4 - x_1 = 9$ ...(2)

(1) + (2): $2x_4 = 25$

$x_4 = 12.5$ ⟶ แทนใน (1) : $x_1 + 12.5 = 16$

$x_1 = 3.5$

จะได้ข้อมูลคือ 3.5 , 6 , 6 , 12.5 ⟶ หา สปส QD จากสูตร $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

Q_3 จะอยู่ตำแหน่ง $\frac{3}{4}\cdot(4+1) = 3.75 \longrightarrow Q_3 =$ ตัวที่ 3 $+ 0.75 \times$ (ตัวที่ 4 − ตัวที่ 3)

$= 6 + 0.75 \times (12.5 - 6)$

$= 6 + 4.875 \qquad = 10.875$

Q_1 จะอยู่ตำแหน่งที่ $\frac{1}{4}\cdot(4+1) = 1.25 \longrightarrow Q_1 =$ ตัวที่1 $+ 0.25 \times$ (ตัวที่ 2 − ตัวที่ 1)

$= 3.5 + 0.25 \times (6 - 3.5)$

$= 3.5 + 0.625 \qquad = 4.125$

ดังนั้น สปส QD $= \frac{10.875 - 4.125}{10.875 + 4.125} = \frac{6.75}{12} = 0.45 = \frac{4}{100} = \frac{9}{20}$

22. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวก และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ที่สอดคล้องกับ

$\log a^3b^{2n}=1,\ \log a^{2n}b^3=1$ และ $\log a^nb^n=\frac{6}{7}$ แล้ว $n\log a^n-\log b^{2n}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{7}$ 2. $\frac{6}{7}$ 3. 1 4. 2 5. 3

<u>ตอบ 5</u>

จาก $\log a^3b^{2n}=1$ และ $\log a^{2n}b^3=1$

n เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ 2n − 3≠ 0
และ a, b เป็นบวก

log เป็น 1 : 1

$$a^3b^{2n}=a^{2n}b^3$$

$$b^{2n-3}=a^{2n-3}$$

$$b=a$$

แทน b = a ใน $\log a^nb^n=\frac{6}{7}$

$$\log a^na^n=\frac{6}{7}$$

$$\log a^{2n}=\frac{6}{7}$$

$$2n\log a=\frac{6}{7} \quad ....(*)$$

และจาก $\log a^3a^{2n}=1$

$$\log a^3a^{2n}=1$$

$$\log a^3+\log a^{2n}=1$$

$$3\log a+\frac{6}{7}=1$$

$$\log a=\frac{1}{21}$$

แทน $\log a=\frac{1}{21}$ ใน (*) จะได้ $2n\left(\frac{1}{21}\right)=\frac{6}{7}$ ...(*)

ดังนั้น $n\log a^n-\log b^{2n}=9\log a^9-\log a^{2(9)}$

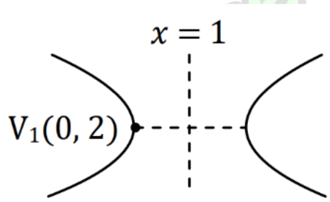
$$=81\log a-18\log a$$

$$=63\log a=63\left(\frac{1}{21}\right)=3$$

23. ให้ H เป็นไฮเพอร์โบลาที่มีแกนสังยุคอยู่บนเส้นตรง $x = 1$ และมีจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(0,2)$ ถ้า H ผ่านจุดศูนย์กลางของวงรีซึ่งมีสมการเป็น $5x^2 - 30x + 9y^2 = 0$ แล้วสมการของไฮเพอร์โบลา H ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $4x^2 - 3y^2 - 8x + 12y - 12 = 0$
2. $4x^2 - 3y^2 - 8x + 12y - 13 = 0$
3. $4x^2 - 3y^2 - 8x - 6y - 12 = 0$
4. $3x^2 - 4y^2 - 6x + 16y - 17 = 0$
5. $3x^2 - 4y^2 - 6x + 8y - 17 = 0$

<u>ตอบ 1</u>



จากข้อมูลแกนสังยุค กับจุดยอด จะวาดได้ดังรูป ซึ่งเป็นไฮเพอร์โบลาแนวนอน โดยมี จุดศูนย์กลาง $(h, k) = (1,2)$

$a =$ ระยะจากจุดศูนย์กลาง $(1,2)$ ไป $V_1(0,2) \longrightarrow a = 1$

แทน h, k, a ในรูปสมการไฮเพอร์โบลาแนวนอน

$$\frac{(x-h)^2}{a^z} - \frac{(y-k)^2}{b^z} = 1 \text{ จะได้ } \frac{(x-1)^2}{1^z} - \frac{(y-2)^2}{b^z} = 1 \qquad \ldots(*)$$

โจทย์ให้ H ผ่านจุดศูนย์กลาง ของ $5x^2 - 30x + 9y^2 = 0$

$$5\left(x^2 - 6x\right) + 9y^2 = 0$$

$$5\left(x^2 - 6x + 9\right) + 9y^2 = 5(9)$$

$$5(x-3)^2 + 9y^2 = 45$$

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-0)^2}{5} = 1$$ → จุดศูนย์กลาง คือ (3, 0)

ดังนั้น (3, 0) ต้องแทนใน (*) แล้วเป็นจริง : $\frac{(3-1)^2}{1^2}-\frac{(0-2)^2}{5}=1$

$$4-\frac{4}{b^2}=1$$

$$3=\frac{4}{b^2}$$

$$b^2=\frac{4}{3}$$

แทน b^2 ใน (*) จะได้สมการของ H คือ $\frac{(x-1)^2}{1^2}-\frac{(y-2)^2}{4/3}=1$

$$\frac{x^2-2x+1}{1}-\frac{3\left(y^2-4y+4\right)}{4}=1$$

$$4\left(x^2-2x+1\right)-3\left(y^2-4y+4\right)=4$$

$$4x^2 3y^2-8x+12y-12=0$$

24. ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิตของจำนวนเต็มบวก โดยที่ มีผลบวกของพจน์ที่สองและพจน์ที่สี่เท่ากับ 60 และพจน์ที่สามเท่ากับ 18 และให้ S_n เป็นผลบวก n พจน์แรกของลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ แล้วค่าของ $\frac{S_8}{S_4}+\frac{S_4}{S_2}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{172}{81}$ 2. $\frac{37}{16}$ 3. 22 4. 88 5. 92

<u>ตอบ 5</u>

จากสูตรอนุกรมเรขาคณิต $S_n=\frac{a_1\left(r^n-1\right)}{r-1}$ จะได้ $\frac{S_8}{S_4}+\frac{S_4}{S_2}=\frac{\frac{a_1\left(r^8-1\right)}{r-1}}{\frac{a_1\left(r^4-1\right)}{r-1}}+\frac{\frac{a_1\left(r^4-1\right)}{r-1}}{\frac{a_1\left(r^2-1\right)}{r-1}}$

$$=\frac{r^8-1}{r^4-1}+\frac{r^4-1}{r^2-1}$$

$$=\frac{(r^4-1)(r^4+1)}{r^4-1}+\frac{(r^2-1)(r^2+1)}{r^2-1}$$

$$=r^4+1+r^2+1$$

$$=r^4+r^2+2 \qquad ...(*)$$

ลำดับเรขาคณิต แต่ละพจน์จะเพิ่มอย่างคงที่ โดยการคูณ r

โจทย์ให้ $a_3=18$ ดังนั้น พจน์ พจน์ $a_2,\ a_3,\ a_4$ จะอยู่ในรูป $\frac{18}{r},\ 18,\ 18r$ ($\times r$, $\times r$)

โจทย์ให้ พจน์ที่สอง + พจน์ที่สี่ เท่ากับ 60 $\longrightarrow \frac{18}{r}+18r=60$

$$18+18r^2=60r$$

$$3+3r^2=10r$$

$$3r^2-10r+3=0$$

$$(3r-1)(r-3)=0$$

$$r=\frac{1}{3},3$$

แต่ r เป็น $\frac{1}{3}$ ไม่ได้ เพราะจะทำให้พจน์ที่อยู่หลังๆ ไม่เป็นจำนวนเต็มบวก $\longrightarrow$ จะได้ $r=3$

แทน $r=3$ ใน (*) จะได้คำตอบ $=3^4+3^2+2=92$

25. กำหนดให้ $U=\{-5,-4,0,1,2,3,4\}$

$A=\{x\in U \mid 2x-1\notin U\}$

$B=\{x\in U \mid x^2>5x\}$

$C=\{x\in U \mid \sqrt{x}+1\in U\}$

จำนวนสมาชิกของเซต $(A-C)\times(B\cup C)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 6 2. 10 3. 12 4. 20 5. 24

ตอบ 3

x	$2x-1$	
-5	-11	$\notin \mathcal{U}$
-4	-9	$\notin \mathcal{U}$
0	-1	$\notin \mathcal{U}$
1	1	
2	3	
3	5	$\notin \mathcal{U}$
4	7	$\notin \mathcal{U}$

A = {-5, -4, 0, 3, 4}

x	$x^2>5x$	
-5	$25>-25$	✓
-4	$16>-20$	✓
0	$0>0$	
1	$1>5$	
2	$4>10$	
3	$9>15$	
4	$16>20$	

B = {-5, -4}

x	$\sqrt{x}+1$	
-5	-	
-4	-	
0	1	$\in \mathcal{U}$
1	$\sqrt{2}$	
2	$\sqrt{3}$	
3	2	$\in \mathcal{U}$
4	$\sqrt{5}$	

$C=\{0,3\}$

ดังนั้น $A-C=\{-5,\ -4,4\}\longrightarrow$ มีสมาชิก 3 ตัว

$B\cup C = \{-5,\ -4,\ 0,\ 3\}\longrightarrow$ มีสมาชิก 4 ตัว

จะได้ $(A-C)\times(B\cup C)$ มีสมาชิก $3\times 4 = 12$ ตัว

$n(X\times Y)=n(X)\times n(Y)$

26. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ 3 × 3 โดยที่ $\det A = \frac{1}{4}$ และ $B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & b \end{bmatrix}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $2AB + 3I = A$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์การคูณมิติ 3 × 3 แล้วค่าของ a + b เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{2}$
2. $-\frac{5}{2}$
3. $\frac{1}{2}$
4. $-\frac{17}{2}$
5. $\frac{19}{2}$

ตอบ 4

$$2AB + 3I = A$$

$$2AB - A = -3I$$

$$(A)(2B - I) = -3I$$

$$\det A \cdot \det(2B - I) = \det(-3I)$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)\cdot \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2a & 0 & 2b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)\cdot \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2a & 0 & 2b-1 \end{bmatrix}\right) = -27$$

$$(12b - 6) - (-12a) = -108$$

$$12b + 12a = -102$$

$$b + a = -\frac{102}{12} = -\frac{17}{2}$$

27. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง

โดยที่ $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x\neq 1$ และ $g(x)=6x+5$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่ $a\neq 1$ และ $g(f(a))=g^{-1}(f(a))$ แล้ว $f\left(g^{-1}(a)\right)+f\left(g(a)\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\dfrac{31}{22}$ 2. $\dfrac{16}{11}$ 3. $\dfrac{37}{22}$ 4. $\dfrac{20}{11}$ 5. $\dfrac{41}{22}$

ตอบ 1

หา g^{-1}: $y=6x+5$

$x=6y+5$ หาอินเวอร์ส $\longrightarrow$ สลับ x, y

$\dfrac{x-5}{6}=y$ $\rightarrow$ จะได้ $g^{-1}(x)=\dfrac{x-5}{6}$

จาก $g(f(a))=g^{-1}(f(a))$

$$6f(a)+5=\frac{f(a)}{6}$$

$$36f(a)+30=f(a)-$$

$$35f(a)=-35$$

$$f(a)=-1$$

$$\frac{a+1}{a-1}=-1$$

$$a+1=-a+1$$

$$2a=0$$

$$a=0$$

ดังนั้น
$$f\left(g^{-1}(a)\right)+f\left(g(a)\right)=f\left(g^{-1}(0)\right)+f\left(g(0)\right)$$
$$=f\left(\frac{0-5}{6}\right)+f\left(6(0)+5\right)$$
$$=f\left(-\frac{5}{6}\right)+f(5)$$
$$=\frac{-\frac{5}{6}+1}{-\frac{5}{6}-1}+\frac{5+1}{5-1}=\frac{\frac{1}{6}}{-\frac{11}{6}}+\frac{6}{4}=-\frac{1}{11}+\frac{3}{2}=\frac{31}{22}$$

28. กำหนดให้ $a(0)=1$ และสำหรับ $n=0,1,2,3,\ldots$ ให้ $a(n+1)=\begin{cases}3+5a(n) & \text{เมื่อ } a(n)\leq 5\\ 2+\frac{1}{5}a & \text{เมื่อ } a(n)>5\end{cases}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $a(3)-a(1)$ เป็นจำนวนเฉพาะ

ข. $a(4)>a(5)$

ค. $a(7)=\frac{146}{25}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

ตอบ 4

ใช้แรงลุยหา $a(1), a(2), \ldots$ ไปเรื่อย ๆ จนถึง $a(7)$

โจทย์ให้ $a(0)=1\leq 5\longrightarrow$ แทน $n=0$ จะใช้เงื่อนไขบน : $a(0+1)=3+5a(0)$

$$a(1)=3+5(1)=8$$

จาก $a(1)=8>5\longrightarrow$ แทน $n=1$ จะใช้เงื่อนไขล่าง : $a(1+1)=2+\frac{1}{5}a(1)$

$$a(2)=2+\frac{1}{5}8 \quad =3.6$$

จาก $a(2)=3.6\leq 5\longrightarrow$ แทน $n=2$ จะใช้เงื่อนไขบน : $a(2+1)=3+5a(2)$

$$a(3)=3+5(3.6)=21$$

จาก $a(3)=21>5\longrightarrow$ แทน $n=3$ จะใช้เงื่อนไขล่าง : $a(3+1)=2+\frac{1}{5}a(3)$

$$a(4)=2+\frac{1}{5}(21) \quad =6.2$$

จาก $a(4)=6.2>5\longrightarrow$ แทน $n=4$ จะใช้เงื่อนไขล่าง : $a(4+1)=2+\frac{1}{5}a(4)$

$$a(5)=2+\frac{1}{5}(6.2) \quad =3.24$$

จาก $a(5)=3.24\leq 5\longrightarrow$ แทน $n=5$ จะใช้เงื่อนไขบน : $a(5+1)=3+5a(5)$

$$a(6)=3+5(3.24)=19.2$$

จาก $a(6)=19.2>5\longrightarrow$ แทน $n=6$ จะใช้เงื่อนไขล่าง : $a(6+1)=2+\frac{1}{5}a(6)$

$a(7) = 2 + \frac{1}{5}(19.2) = 5.84$

ก. $a(3) - a(1) = 21 - 8 = 13$ เป็นจำนวนเฉพาะ ✓

ข. $a(4) = 6.2$ และ $a(5) = 3.24 \longrightarrow a(4) > a(5)$ ✓

ค. $a(7) = 5.84 = \frac{584}{100} = \frac{146}{25}$ ✓

29. กำหนดให้ a, b, c, m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก สอดคล้องกับ $1 < a < b \leq c$ และ $am = bn = c$ พิจารณาอสมการต่อไปนี้

ก. $\frac{a}{m} < \frac{c}{n}$

ข. $bm < c$

ค. $n + mn < c + mc$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

<u>ตอบ 2</u>

ก. เนื่องจาก a และ m เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น $\frac{a}{m} \leq a$

โจทย์ให้ $a < b$ และจาก $bn = c$ จะได้ $b = \frac{c}{n}$ จึงสรุปได้ว่า $\frac{a}{m} \leq a \leq b = \frac{c}{n} \longrightarrow$ ก. ถูก

ข. จาก $a < b$

$am < bm$ คูณ m ตลอด

$c < bm$ โจทย์ให้ am = c $\longrightarrow$ ข. ผิด

ค. โจทย์ให้ $bn = c$ และเนื่องจาก $b > 1$ จะสรุปได้ว่า $n < c$ ...(1)

$mn < mc$ ...(2) คูณ m ตลอด

$(1) + (2):\ n + mn < c + mc$ $\longrightarrow$ ค. ถูก

30. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และให้ $r = \{(x,\ y) \in R \times R \mid y < x - 2\}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $(5,7) \notin r^{-1}$

ข. $(-6,-3) \in r^{-1}$

ค. $r \cap r^{-1} \neq \varnothing$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

<u>ตอบ 1</u>

ก. $(5,7) \notin r^{-1}$ ก็ต่อเมื่อ $(7,\ 5) \notin r$

แทน (7,5)ในเงื่อนไขของ r จะได้ $5 < 7 - 2$ เป็นเท็จ ดังนั้น $(7,\ 5) \notin r \longrightarrow$ ก. ถูก

ข. $(-6,-3) \in r^{-1}$ ก็ต่อเมื่อ $(-3,-6) \in r$

แทน $(-3,-6)$ ในเงื่อนไขของ r จะได้ $-6 < -3 - 2$ เป็นจริง ดังนั้น $(-3,-6) \in r \longrightarrow$ ข. ถูก

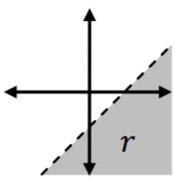
ค. จะดูว่ากราฟของ r กับ r^{-1} มีส่วนซ้อนทับกันหรือไม่

$r : y < x - 2$

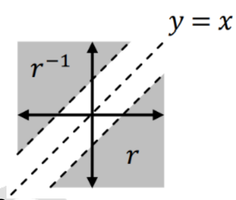
$\longrightarrow$ ความชัน = 1

$\longrightarrow$ ระยะตัดแกน y คือ -2

y น้อย $\longrightarrow$ แรเงาฝั่ง y ลบ



จะสมมาตรกับ r
เทียบกับเส้นตรง $y = x$



จะเห็นว่า r กับ r^{-1} ไม่มีส่วนซ้อนทับกันเลย $r \cap r^{-1} \neq \varnothing$ ดังนั้น $\longrightarrow$ ค. ผิด

31. กำหนดให้ P(S) แทนเพาเวอร์เซตของเซต S และ n(S) แทนจำนวนสมาชิกของเซต S ให้ A, B และ C เป็นเซตจำกัด โดยที่ $B \subset A$ และ $A \cap C \neq \varnothing$
ถ้า $n(P(P(B))) = n(P(B \cup C)) = 16$, $n(B \cap C) = 1$, $n(A \cap C) = 2$
และ $n(P(A - C)) = 4n\big(P(C - A)\big)$ แล้ว $n(P(A))$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 32

ย้อนสูตร จำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซต $n\big(P(A)\big) = 2^{n(A)}$ จะได้

$$n\big(P(P(B))\big) = 16 = 2^4$$
$$n\big(P(B)\big) = 4 = 2^2$$
$$n(B) = 2$$

$$n(P(B \cup C)) = 16 = 2^4$$
$$n(B \cup C) = 4$$

จากสูตร Inclusive – Exclusive : $n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C)$
$$4 = 2 + n(C) - 1$$
$$3 = n(C)$$

จาก $n(P(A - C)) = 4n(P(C - A))$
$$2^{n(A-C)} = 4 \cdot 2^{n(C-A)}$$
$$2^{n(A-C)} = 2^2 \cdot 2^{n(C-A)}$$
$$2^{n(A-C)} = 2^{2+n(C-A)}$$
$$n(A - C) = 2 + n(C - A)$$
$$n(A) - n(A \cap C) = 2 + n(C) - n(A \cap C)$$
$$n(A) = 2 + 3 = 5 \rightarrow \text{จะได้ } n\big(P(A)\big) = 2^5 = 32$$

$$\boxed{n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)}$$

32. ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\left|x^2 - 2|x|\right| = x^2 - 3x + 2$
ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต A เท่ากับเท่าใด

ตอบ 2.5

จะแบ่งกรณี เพื่อให้ถอดค่าสัมบูรณ์ $|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$

<u>กรณี</u> $x \geq 0$ จะได้ $|x| = x$: $\left|x^2 - 2|x|\right| = x^2 - 3x + 2$

$$\left|x^2-2x\right|=x^2-3x+2$$

จะได้ $x^2-2x=x^2-3x+2$ หรือ $x^2-2x=-\left(x^2-3x+2\right)$ เมื่อ $x^2-3x+2\geq 0$

$x=2$ $\qquad$ $x^2-2x=-x^2+3x+2$

$$2x^2-5x+2=0$$

$$(2x-1)(x-2)=0$$

$$x=\frac{1}{2},2$$

ตรวจสอบเงื่อนไข $x^2-3x+2\geq 0$: $\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\left(\frac{1}{2}\right)+2\geq 0$ $\qquad$ $2^2-3(2)+2\geq 0$

$0.25-1.5+2\geq 0$ $\qquad$ $4-6+2\geq 0$

จะได้คำตอบของกรณีนี้ คือ $\frac{1}{2},2$

<u>กรณี</u> $x>0$ จะได้ $|x|=-x$: $\quad \left|x^2-2|x|\right|=x^2-3x+2$

$$\left|x^2+2x\right|=x^2-3x+2$$

จะได้ $x^2+2x=x^2-3x+2$ หรือ $x^2+2x=-\left(x^2-3x+2\right)$ เมื่อ $x^2-3x+2\geq 0$

$5x=2$ $\qquad$ $x^2+2x=-x^2+3x-2$

$x=0.4$ $\qquad$ $2x^2-x+2=0$

ใช้ไม่ได้ เพราะขัดแย้งกับ
เงื่อนไขของกรณี x<0 $\qquad$ ไม่มีคำตอบเพราะ $b^2-4ac=(-1)^2-4(2)(2)$ ติดลบ

จะได้กรณีนี้ ไม่มีคำตอบ

รวมสองกรณี จะได้ผลบวกคำตอบ $=\frac{1}{2}+2=2.5$

33. ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $2\log_3\sqrt{x+1}+\log_9(x-1)^2=\log_3 2x$ แล้วผลคูณของสมาชิกทั้งหมดในเซต A เท่ากับเท่าใด

<u>ตอบ 1</u>

จัดรูป และพิจารณาค่า x ที่เป็นไปได้ (หลัง log ต้องเป็นบวก) ดังนี้

$2\log_3\sqrt{x+1}$

$=\log_3\sqrt{x+1}^2$

$=\log_3(x+1)$

เมื่อ $x>-1$ ...(1)

$\log_9(x-1)^2$

$=\log_{3^2}(x-1)^2$

$=\frac{2}{2}\log_3|x-1|$

$=\log_3|x-1|$

เมื่อ $x\neq 1$ ...(2)

$\log_3 2x$

เมื่อ $x>0$ ...(3)

จะได้สมการคือ $2\log_3\sqrt{x}+1+\log_9(x-1)^2=\log_3 2x$

$$\log_3(x+1)+\log_3|x-1|=\log_3 2x$$

$$\log_3((x+1)|x-1|)=\log_3 2x$$

$$(x+1)|x-1|=2x$$

จะแบ่งกรณี เพื่อกำจัดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ $|x-1|$ ด้วยสมบัติ $|a|=\begin{cases}a & \text{เมื่อ}\ a\geq 0\\ -a & \text{เมื่อ}\ a<0\end{cases}$

กรณี $x\geq 1$ จะได้ $x-1\geq 0$ ดังนั้น $|x-1|=x-1$

$$(x+1)|x-1|=2x$$

$$(x+1)(x-1)=2x$$

$$x^2-1=2x$$

$$x^2-2x-1=0$$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(2)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=1\pm\sqrt{2}$$

แต่กรณีนี้ $x\geq 1$ ดังนั้น $1-\sqrt{2}$ จะใช้ไม่ได้ $\longrightarrow$ เหลือค าตอบเดียวคือ $1+\sqrt{2}$

กรณี $x<1$ จะได้ $x-1<0$ ดังนั้น $|x-1|=-(x-1)$

$$(x+1)|x-1| = 2x$$
$$(x+1)\left(-(x-1)\right) = 2x$$
$$-\left(x^2-1\right) = 2x$$
$$0 = x^2+2x-1$$
$$x = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{2\pm\sqrt{8}}{2} = -1\pm\sqrt{2}$$

แต่จากเงื่อนไขหลัง log ใน (3) จะได้ $x>0$ ดังนั้น $-1-\sqrt{2}$ ใช้ไม่ได้ $\longrightarrow$ เหลือคำตอบเดียวคือ $-1+\sqrt{2}$

รวมสองกรณี จะได้ผลคูณคำตอบ $=\left(1+\sqrt{2}\right)\left(-1+\sqrt{2}\right) = -1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+2 = 1$

34. ถ้า A เป็นเซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ x และ y เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับสมการ

$$2^x\log_5 y = 4\log_{25}5+4^x$$
$$2^x\log_5 y^3 = (\log_5 y)^2+9$$

และให้ $B=\left\{xy \mid (x,\ y)\in A\right\}$ ค่ามากที่สุดของสมาชิกในเซต B เท่ากับเท่าใด

ตอบ 125

จัดรูปสมการ และเปลี่ยนตัวแปร $2^x = c$ และ $\log_5 y = d$ จะได้

$$2^x\log_5 y = 4\log_{25}5+4^x$$
$$2^x\log_5 y = 4\log_{5^2}5+\left(2^2\right)^x$$
$$2^x\log_5 y = \frac{4}{2}\log_5 5+(2^x)^2$$
$$cd = 2+c^2$$
$$d = \frac{2}{c}+c \quad ...(*)$$

$$2^x\log_5 y^3 = (\log_5 y)^2+9$$
$$2^x(3\log_5 y) = \left(\log_5 y\right)^2+9$$
$$c(3d) = d^2+9$$
$$3cd = d^2+9$$
$$3(2+c^2) = (2c+c)^2+9$$
$$6+3c^2 = \frac{4}{c^2}+4+c^2+9$$

$$2c^2-7-\frac{4}{c^2}=0$$
คูณ c^2 ตลอด
$$2c^4-7c^2-4=0$$
$$(2c^2+1)(c^2-4)=0$$
$$(2c^2+1)(c-2)(c+2)=0$$

ไม่มีคำตอบ เพราะ c^2 เป็นลบ

$c=2,\ \cancel{-2}$

c คือ $x^2 \longrightarrow$ เป็นลบไม่ได้

แทน $c=2$ ใน (*) จะได้ $d=\frac{2}{2}+2=3$

เปลี่ยน c, d กลับไปเป็น x, y จะได้ $c=2^x=2$ และ $d=\log_5 y=3$

$x=1$ $\qquad\qquad$ $y=5^3$

จะได้ $xy=(1)\left(5^3\right)=125$

35. กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-|x|}{3-x} & \text{เมื่อ } x<3\\ ax+10 & \text{เมื่อ } x\geq 3\end{cases}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง

ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง แล้ว ค่าของ $f(a-6)+f(a)+f(a+6)$ เท่ากับเท่าใด

__ตอบ 0.5__

f ต่อเนื่อง แปลว่าทั้งสองสูตรต้องได้ค่าเท่ากันตรงรอยต่อ $x\longrightarrow 3^-, x=3, x\longrightarrow 3^+$

เมื่อ $x\longrightarrow 3^-$ จะใช้สูตรบน และเนื่องจาก x เป็นบวก ดังนั้น $|x|=x$

จะได้ $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3-|x|}{3-x}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3-x}{3-x}=1$ $\qquad$ ...(1)

เมื่อ $x=3$ กับ $x\longrightarrow 3^+$ จะใช้สูตรล่าง จะได้ $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=3a+10$ $\qquad$ ...(2)

เนื่องจาก f ต่อเนื่อง จะได้ $(1)=(2)$: $\quad 3a+10=1$

$a=-3$

ดังนั้น $\quad f(a-6)+f(a)+f(a+6)=f(-3-6)+f(-3)+f(-3+6)$

$= f(-9) + f(-3) + f(3)$

$= \dfrac{3-|-9|}{3-(-9)} + \dfrac{3-|-3|}{3-(-3)} + (-3)(3) + 10$

$= \dfrac{-6}{12} + \dfrac{0}{6} + 1 \quad = 0.5$

36. กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x) = ax2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริง
ถ้า $f(-1) + f(1) = 14$, $f'(1) = 2f(1)$ และ $f'(0) + f''(0) = 6$
แล้ว $\int_0^1 f(3x)dx$ เท่ากับเท่าใด

<u>**ตอบ 11**</u>

จาก $f(x) = ax2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$f''(x) = 2a$

จะได้ $f(-1) + f(1) = 14$

$a(-1)^2 + b(-1) + c + a(1)^2 + b(1) + c = 14$

$2a + 2c = 14$

$a + c = 7 \quad ...(1)$

และจาก $f'(1) = 2f(1)$

$2a(1) + b = 2\left(a(1)^2 + b(1) + c\right)$

$2a + b = 2a + 2b + 2c$

$0 = b + 2c \quad ...(2)$

และจาก $f'(0) + f''(0) = 6$

$2a(0) + b + 2a = 6$

$2a + b = 6 \quad ...(3)$

$(3)-(2): (2a+b)-(b+2c) = 6-0$

$2a - 2c = 6$

$a - c = 3 \quad ...(4)$

$(1)+(4): a + c + a - c = 7 + 3$

$2a = 10$

$a = 5$

แทนใน (4) : $5 - c = 3$

$2 = c$

แทนใน (2) : $b + 2(2) = 0$

$b = -4$

แทน a, b, c จะได้ $f(x)=5x^2-4x+2$

$$f(3x)=5(3x)^2-4(3x)+2$$

$$=45x^2-12x+2$$

$$\int_0^1 f(3x)dx=15x^3-6x^2+2x\Big|_0^1$$

$$=(15-6+2)-0 \quad = \ 11$$

37. กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x)=ax^3+bx^2+1$ เมื่อ a, b เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง

ถ้า $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=0$ และ $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{1}{4}$ แล้ว $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f'(x)-f'(4)}{x-4}$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 18

จากนิยาม $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ จะได้ คือ อนุพันธ์ของ $f(x)$ เมื่อ $x=2\to=f'(2)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=0$

จาก $f(x)=ax^3+bx^2+1$

$$f'(x)=3ax^2+2bx$$

$$f'(2)=3a(2^2)+2b(2)$$

$$=12a+4b$$

$$12a+4b=0$$

$$3a+b=0$$

$$b=-3 \qquad ...(*)$$

และจาก

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{4}$$

$$\frac{ax^4}{4}+\frac{bx^3}{3}x\Big|_0^1=\frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+1\right)-0=\frac{1}{4}$$

$$\frac{a}{4}+\frac{-3a}{3}+1=\frac{1}{4}$$

จาก (*)

$$a-4a+4=1$$

$$b=-3a$$

แทนใน (*) จะได้ $b=-3(1)=-3$

จากนิยาม จะได้ $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{f'(x)-f'(4)}{x-4}$ คือ อนุพันธ์ของ $f'(x)$ เมื่อ $x=4 \longrightarrow f''(4)$

จาก $f'(x)=3ax^2+2bx$

$$=3(1)x^2+2(-3)x$$

$$=3x^2-6x$$

$$f''(x)=6x-6$$

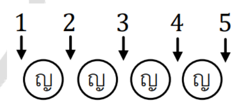
$$f''(4)=6(4)-6 = 18$$

38. คนกลุ่มหนึ่งมีผู้ชาย n คน ผู้หญิง $n+1$ คน เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก ต้องการจัดคนกลุ่มนี้ยืนเรียงแถวเป็นแนวตรงเพียงหนึ่งแถว ถ้าจำนวนวิธีจัดคนกลุ่มนี้ยืนเรียงแถวแนวตรง โดยไม่มีผู้ชายสองคนใดยืนติดกัน เท่ากับสองเท่าของจำนวนวิธีจัดคนกลุ่มนี้ยืนเรียงแถวเป็นแนวตรงโดยผู้ชายยืนติดกันทั้งหมด แล้วคนกลุ่มนี้มีทั้งหมดกี่คน

ตอบ 7

ไม่มีชายยืนติดกัน : เอา หญิง $n+1$ คน มาเรียงก่อน จะเรียงได้ $(n+1)!$ แบบ

หญิง $n+1$ คน จะมีช่องว่างให้ ชาย ลงได้ $n+2$ ช่อง



เรียงชาย n คน ลงใน $n+2$ ช่อง จะเรียงได้ $P_{n+2,n}=\dfrac{(n+2)!}{2!}$ แบบ

รวมจำนวนแบบ $=(n+1)!\dfrac{(n+2)!}{2!}$ แบบ

ชายยืนติดกันหมด : เอา ชาย n คน มัดรวมเป็นคนใหม่ 1 คน

มี หญิง $n+1$ คน รวมแบบใหม่เป็นคนทั้งหมด $n+2$ คน $\longrightarrow$ เรียงได้ $(n+2)!$ แบบ

ชายทั้ง n คนในมัด จะสลับที่กันเองได้ n! แบบ

รวมจำนวนแบบ $=(n+2)!n!$ แบบ

โจทย์ให้ ไม่มีชายยืนติดกัน = 2 × ชายยืนติดกันหมด

$$(n+1)!\frac{(n+2)!}{2!}=2(n+2)!n!$$

$$n+1=4$$

$$n=3$$

ดังนั้น เป็นชาย 3 คน และเป็นหญิง $3+1 = 4$ คน $\longrightarrow$ รวมเป็นคนทั้งหมด $3+4=7$ คน

39. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก และให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับของจำนวนจริง

โดยที่ $a_1=a$, $a_2=b$ และ $a_n=\dfrac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}}{n-1}$ สำหรับ $n=3,4,5,\ \ldots$

ถ้า $a_1+2a_2+3a_3+4a_4=\frac{31}{8}$ และ $\sum_{i=1}^{10} a_i=\frac{30}{8}$ แล้วค่าของ $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 36

จาก $a_n=\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_{n-1}}{n-1}$ → แทน n ด้วย $n+1$:

$$a_{n+1}=\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_{n+1-1}}{n+1-1}$$

$$na_n-a_n=a_1+a_2+a_3+...+a_{n-1}$$

$$na_n=a_1+a_2+a_3+...+a_{n-1}+a_n \quad ...(*)$$

$$a_{n+1}=\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}$$

จาก(*)

$$a_{n+1}=\frac{na_n}{n}$$

$$a_{n+1}=a_n \quad \text{สำหรับ } n=3,4,5,\ \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{แทน } n=3 \text{ จะได้ } a4=a3 \\ \text{แทน } n=4 \text{ จะได้ } a5=a4 \\ \quad\vdots \\ \quad\vdots\end{array}\right\} \text{จะได้ } a_3=a_4=a_5=....$$

ซึ่งจาก $a_n=\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_{n-1}}{n-1}$ แทน $n=3$ จะได้ $a_3=\frac{a_1+a_2}{3-1}=\frac{a+b}{2}$

นั่นคือ จะได้ $a_1=a$, $a_2=b$ และตั้งแต่ a_3 ขึ้นไป มีค่า $\frac{a+b}{2}$ ทุกตัว

แทนใน $a1+2a_2+3a_3+4a_4=\frac{31}{8}$

$$a+2b+3\left(\frac{a+b}{2}\right)+4\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{31}{8}$$

$$36a+44b=31 \quad ...(1)$$

$$\sum_{i=1}^{10} a_i=\frac{30}{8}$$

$$a_1+a_2+a_3+...+a_{10}=\frac{30}{8}$$

$$4a+4b=3 \quad ...(2)$$

$11\times(2)-1:(44a+44b)-(36a+44b)=33-31$

$$8a=2$$

$$a=\frac{1}{4} \rightarrow \text{แทนใน (2): } 4\left(\frac{1}{4}\right)+4b=3$$

$$b=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

จะได้ $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=\left(\frac{1}{\frac{1}{4}}+\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2=(4+2)^2=36$

40. ข้อมูลประชากรชุดหนึ่งมี 10 จำนวน ดังนี้ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$ โดยที่ $x_i>0$ สำหรับ $i=1,2,3,\ldots,10$ ถ้า $\sum_{i=1}^{10}(x_i-4)=40$ และ $\sum_{i=1}^{10}(x_i-4)^2=170$ แล้วความแปรปรวนของข้อมูล $2(x_1+3), 2(x_2+3), 2(x_3+3), \ldots, 2(x_{10}+3)$ เท่ากับเท่าใด

__ตอบ 4__

พิจารณาข้อมูล $x_1-4,\ x_2-4,\ x_3-4,\ \ldots,\ x_{10}-4$

จะได้ว่าข้อมูลชุดนี้มีค่าเฉลี่ย $=\frac{\sum(x_i-4)}{10}=\frac{40}{10}=4$

และมีความแปรปรวน $==\frac{\sum(x_i-4)^2}{10}-(\text{ค่าเฉลี่ย})^2=\frac{170}{10}=4^2=1$

พิจารณาข้อมูล $x_1+3,\ x_2+3,\ x_3+3,\ \ldots,\ x_{10}+3$

เนื่องจากข้อมูลชุดนี้ เพิ่มจากข้อมูลชุดแรกอย่างคงที่ ดังนั้น ข้อมูลชุดนี้จะมีความแปรปรวนเท่าเดิมคือ 1

พิจารณาข้อมูล $1(x_1+3),\ 2(x_2+3),\ 2(x_3+3),\ \ldots,\ 2(x_{10}+3)$

เนื่องจากข้อมูลชุดนี้ เพิ่มจากข้อมูลชุดก่อนหน้า 2 เท่า ดังนั้น S จะเพิ่มจากเดิม 2 เท่า

ทำให้ ความแปรปวน (s^2) จะเพิ่มเป็น $2^2=4$ เท่า $\longrightarrow$ จะได้ความแปรปรวน $=4(1)=4$

41. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $0 \le c < a < b$ และ $a + 2b + 3c = 32$
ถ้า c เป็นจำนวนคู่ และ 10 หาร b ลงตัว แล้วค่าของ $4a + 5b + 6c$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 86

จาก $0 \le c < a < b$ จะได้ a, b เป็นบวก และ จาก 10 หาร b ลงตัว จะได้ $b = 10, 20, 30, \dots$
จาก $a + 2b + 3c = 32$ จะทำให้ b เป็น 20 ขึ้นไปไม่ได้ เพราะจะทำให้ $a + 2b + 3c$ เกิน 32
ดังนั้น สรุปได้ทันทีว่า $b = 10$
แทนค่า b จะได้ $0 \le c < a < 10$ และ $a + 2(10) + 3c = 32$
$$a + 3c = 12 \quad \dots(*)$$
จาก c เป็นคู่ จะได้ $c = 0, 2, 4, \dots$ $\rightarrow$ จาก (*) จะได้ว่า c เป็น 0 ไม่ได้ เพราะจะทำให้ $a = 12$ ขัดแย้งกับที่ $a < 10$
$\rightarrow$ c เป็น 4 ขึ้นไปไม่ได้ เพราะ a เป็นบวกทำให้ $a + 3c$ เกิน 12 ขัดแย้งกับ (*)
$\rightarrow$ จึงสรุปได้ว่า $c = 2$ แทนใน (*) จะได้ $a + 3(2) = 12$
$$a = 6$$
ดังนั้น $4a + 5b + 6c = 4(6) + 5(10) + 6(2) = 86$

42. กำหนดข้อมูลชุดหนึ่ง ดังนี้
เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก
ถ้าข้อมูลชุดนี้ มีตำแหน่งของควอไทล์ที่ 3 (Q_3) เท่ากับ 13.5
แล้วมัธยฐานของข้อมูลชุดนี้เท่ากับเท่าใด

คะแนน	ความถี่
0 – 4	4
5 – 9	3
10 – 14	5
15 – 19	a
20 – 24	b

ตอบ 11.5

โจทย์ให้ตำแหน่งของ Q_3 คือ 13.5 ซึ่งหาได้จากสูตร $\frac{3}{4}(N)$ ดังนั้น $\frac{3}{4}(N) = 13.5$
$$N = 18$$

คะแนน	ความถี่	F
0 – 4	4	4
5 – 9	3	7
10 – 14	5	12
15 – 19	a	
20 – 24	b	

จะได้ตำแหน่งของมัธยฐานคือ $\frac{N}{2} = 9$
จะเห็นว่าความถี่สะสม (F) วิ่งผ่าน 9 เป็นครั้งแรกในชั้น 10 – 14
ดังนั้น มัธยฐานอยู่ในชั้น 10–14 $\rightarrow$ ความกว้างชั้น
$$= 14.5 - 9.5 = 5$$
จากสูตร $\text{Med} = L + \left(\dfrac{\frac{N}{2} - F_L}{fm}\right) I$

$$= 9.5 + \left(\frac{9-7}{5}\right)(5) = 11.5$$

43. ให้ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนจริง โดยที่มีผลบวกสี่พจน์แรกของลำดับเท่ากับ 14 และ $a_{20} = a_{10} + 30$ และให้ $b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $b_1 = a_3$ และ $b_{n+1} = b_n + 1$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ เท่ากับเท่าใด

<u>ตอบ 3</u>

ถ้าจะหา $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ พิจารณาดีกรี และ สปส ของ a_n และ b_n

จาก $b_{n+1} = b_n + 1$ แสดงว่าแต่ละพจน์ของลำดับ $\{b_n\}$ เพิ่มทีละ 1 $\longrightarrow$ ลำดับ $\{b_n\}$ ก็เป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วม $d_b = 1$

ใช้สูตรลำดับเลขคณิต จะได้

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_1 + (n-1)d_a}{b_1 + (n-1)d_b}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a_1 + nd_a - d_a}{b_1 + nd_b - d_b}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_1}{n} + d_a - \frac{d_a}{n}}{\frac{b_1}{n} + d_b - \frac{b_a}{n}} = \frac{0 + d_a + 0}{0 + d_b + 0} = \frac{d_a}{d_b}$$

จาก

$$a_{20} = a_{10} + 30$$
$$a_1 + (20-1)d_a = a_1 + (10-1)d_a + 30$$
$$19d_a = 9d_a + 30$$
$$d_a = 3$$

แทน $d_a = 3$ และ $d_b = 1$ ใน (*) จะได้ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{3}{1} = 3$

<u>หมายเหตุ</u> : ผลบวกสี่พจน์แรก = 14 ที่โจทย์ให้ จะช่วยให้หา a_1 ได้ แต่ข้อนี้ไม่จำเป็นต้องใช้

44. ให้ $\bar{a}, \bar{b}$ และ $\bar{c}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ โดยที่ $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}, \bar{b} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + 3\sqrt{2}\bar{k}$

เวกเตอร์ $\overline{c}$ ทำมุม 45° และ 60° กับเวกเตอร์ $\overline{a}$ และเวกเตอร์ $\overline{j}$ ตามลำดับ และ $\overline{c}\cdot\overline{k}>0$ ถ้า $\overline{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\overline{c}$ แล้ว $\overline{u}\cdot\overline{b}$ เท่ากับเท่าใด

__ตอบ 3.5__

เนื่องจาก $\overline{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศเหมือน $\overline{c}$ ดังนั้น $\overline{u}$ ทำมุม 45° และ 60° กับ $\overline{a}$ และ $\overline{j}$ ด้วย

ให้ $\overline{u}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ เนื่องจาก $\overline{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ดังนั้น $|\overline{u}|=1$

$\overline{u}$ ทำมุม 60° กับ $\overline{j}$ ดังนั้น $\overline{u}\cdot\overline{j}=|\overline{u}||\overline{j}|\cos 60^\circ$

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=(1)(1)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$y=0.5$$

และจาก $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ ดังนั้น $|\overline{a}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$

$\overline{u}$ ทำมุม 45° กับ $\overline{a}$ ดังนั้น $\overline{u}\cdot\overline{a}=|\overline{u}||\overline{a}|\cos 45^\circ$

$$\begin{bmatrix}x\\0.5\\z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=(1)\left(\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$x+0.5=1$$

$$x=0.5$$

และจาก $\overline{c}\cdot\overline{k}>0$ และจาก $\overline{u}$ มีขนาดหนึ่งหน่วยดังนั้น $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$

$$\left|\overline{c}\right|\overline{u}\cdot\overline{k}>0$$

$$\overline{u}\cdot\overline{k}>0$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}>0$$

$$z>0$$

$$0.5^2+0.5^2+z^2=1$$

$$z^2=0.5$$

$$z=\pm\sqrt{0.5}$$

$$z=\sqrt{0.5}$$

จะได้ $$\overline{u}\cdot\overline{b}=\begin{bmatrix}0.5\\0.5\\\sqrt{0.5}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\-2\\3\sqrt{2}\end{bmatrix}=(0.5)(3)+(0.5)(-2)+\left(\sqrt{0.5}\right)\left(3\sqrt{2}\right)$$

$$=1.5-1+3 \qquad =3.5$$

45. กำหนดให้ $f(x)=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+x}}}$ สำหรับจำนวนจริง $x>0$

ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก ที่สอดคล้องกับ
$f(1+a)+f(2+a)+f(3+a)+...+f(60+a)=2250$ แล้ว a มีค่าเท่ากับเท่าใด

__ตอบ 6__

จัดรูป $f(x)=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+x}}}$

$$=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1+x-1}{1+x}}}$$

$$=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1+x}{x}}$$

$$=1-\dfrac{1}{\dfrac{x-(1+x)}{x}}$$

$$=1-\dfrac{x}{-1}$$

$$=1+x$$

และจาก $f(1+a)+f(2+a)+f(3+a)+...+f(60+a)=2250$

$$1+1+a+1+2+a+1+3+a+...+1+60+a=2250$$

$$60(1)+(1+2+3+..+60)+60a=2250$$

$$60+\frac{60}{2}(60+1)+60a=2250$$

$\div 30$ ตลอด

$$2+61+2a=75$$

$$a=6$$